R

Math. f. 279 u

R

III

Leichtfaßliche Anleitung

zur

Analysis

endlicher Größen und des Unendlichen

und zur höheren Geometrie

für Physiker, Architekten, Hydrotekten, Berg- und Salzwerksbeamte, Ingenieurs und Technologen.

Von

Karl Christian Langsdorf,

Dr. der Philosophie, Großherzoglich Badischem Geheimen Hofrathe und ordentlichem Lehrer der Mathematik zu Heidelberg; Professor Honorarius der Russisch-kaiserlichen Universität zu Wilna; der gelehrten Societäten zu Göttingen, zu Lausanne, zu Harlem; der Kaiserl. Leopold. Akademie der Naturforscher, der Akademie zu München; der Königl. Schwedischen patriotischen Gesellschaft, der Kurfürstlich Hessischen Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg u. a. Mitgliede.

Mit 3 Tafeln in Stein.

Mannheim und Heidelberg,

in der Schwan- und Götzischen Buchhandlung

1817.

39 B

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem Durchlauchtigsten Fürsten

und

Herrn,

Wilhelm

Regierenden Herzoge

von Nassau ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Durchlauchtigster Herzog
gnädigster Fürst und Herr,

Unvergeßlich ist mir das hohe Beispiel, das vormals Eure Herzogliche Durchlaucht, während Höchst-Ihrem mehrjährigen hiesigen Aufenthalte, nicht nur durch Achtung für die Wissenschaften und ihre Lehrer, sondern auch durch eigene wissenschaftliche Anstrengung sowohl Studirenden überhaupt, als insbesondere Fürsten-Söhnen gaben, — unvergeßlich jenes hohe Streben nach Regententugenden, deren frühere Ausübung jetzt die Nassauischen Lande beglückt, — unvergeßlich jene ausgezeichnete Huld, der Höchstdieselben mich insbesondere werth zu halten geruhten, und unter der noch jetzt zwei meiner Brüder und viele meiner Verwandten für Treue und

Diensteifer fürstlich und wahrhaft landesväterlich be-
lohnt im Nassauischen Staate so glücklich leben.
Möchten Eure Herzogliche Durchlaucht die
Art des Danks, den ich dafür in unterthänigster
Ueberreichung dieser Blätter öffentlich zu bezeugen
wage, gnädigst aufnehmen.

Der ich in tiefster Ehrfurcht ersterbe

Eurer Herzoglichen Durchlaucht

Heidelberg, den
24ten Mai 1817.

unterthänigster

Karl Christian Langsdorf.

Vorerinnerung.

Aus einem Versehen hatte ich dem Manuskripte bei der Absendung an den Herrn Verleger die noch nicht beendigt gewesene Einleitung, welche die Stelle der Vorrede vertreten sollte, beigelegt, und gegen mein Vermuthen wurde solche sogleich abgedruckt. Ich hatte mir vorbehalten, etwaige mir späterhin noch nöthig scheinende Bemerkungen nachzutragen, auch eine kurze Anzeige des Inhalts beizufügen, und ein Verzeichniß nöthiger Verbesserungen anzuhängen. Um nun dieses alles nachholen zu können, sahe ich mich noch zu dieser besonderen Vorerinnerung genöthigt. In Bezug auf den Vortrag im Ganzen glaube ich, um dem etwaigen Vorwurfe einer Ungleichförmigkeit zu begegnen, hier noch bemerken zu müssen, daß Niemand spätere Abschnitte der Analysis endlicher Größen durchgehen müsse, der sich nicht durch fleißiges Studiren der früheren schon geläufige Kenntnisse für die späteren verschafft hat. Dem Studium der Analysis des Unendlichen muß das endlicher Größen vorangehen, und so dem Studium der höhern Geometrie das der Analysis des Unendlichen. Unter dieser Voraussetzung wird man den mündlichen Vortrag durchaus so entbehrlich finden, als ich ihn in den ersten Bogen zu machen bemüht gewesen bin. In Bezug auf die Auflösung kubischer Gleichungen glaube ich noch eine nützliche Bemerkung nachtragen zu müssen, die man etwa dem §. 67. beifügen könnte.

Die allgemeine kubische Gleichung

$$\text{A.)}\quad x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

läßt sich in einem besonderen Falle in eine quadratische verwandeln.

Machen wir nämlich $(x + \frac{1}{3}\alpha)^3$, so wird

$$(x + \tfrac{1}{3}\alpha)^3 = x^3 + \alpha x^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^2 x + \frac{1}{27}\alpha^3$$

also

$$(x + \tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{1}{3}\alpha^2 x - \frac{1}{27}\alpha^3 = x^3 + \alpha x^2$$

Dieses in (A) gesetzt, giebt

$$(x + \tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{1}{3}\alpha^2 x - \frac{1}{27}\alpha^3 + \beta x + \gamma = 0$$

oder

$$(x + \tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \left((\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \beta).x + \frac{1}{27}\alpha^3 - \gamma\right) = 0$$

Setzen wir das ganze subtraktive Glied $= N.(x + \frac{1}{3}\alpha)$ so wird

$$(x + \tfrac{1}{3}\alpha)^3 - N.(x + \tfrac{1}{3}\alpha) = 0$$

also auch

$$(x + \tfrac{1}{3}\alpha)^2 - N = 0$$

und

$$x = -\tfrac{1}{3}\alpha \pm \sqrt{N} \quad (\odot$$

Weil aber

$$(\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \beta).x + \frac{1}{27}\alpha^3 - \gamma = N.(x + \tfrac{1}{3}\alpha)$$

seyn soll, so erhält man

1) $N = \frac{1}{3}\alpha^2 - \beta$

2) $N.\frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{27}\alpha^3 - \gamma$, also $N = \frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{3\gamma}{\alpha}$

Demnach wegen No. 1.

$$\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \beta = \tfrac{1}{9}\alpha^2 - \frac{3\gamma}{\alpha}$$

und

$$\beta = \tfrac{2}{9}\alpha^2 + \frac{3\gamma}{\alpha} \quad (\mathbb{C}$$

Tritt also die Bedingung ($\mathbb{C}$) ein, so wird in ($\odot$)

$$x = -\tfrac{1}{3}\alpha \pm \sqrt{(\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \beta)}$$

Zum Beweise des Vorkommens solcher Fälle, will ich für diejenigen, welche sich mit der Lehre vom Maximum und Minimum schon bekannt gemacht haben, folgende Aufgabe hersetzen. (s. im Buche S. 325).

Man denke sich in einem Kreise, dessen Durchmesser a ist, eine Sehne und den ihr parallen Durchmesser gezogen, dann aber aus beiden Endpunkten der Sehne Perpendikel auf den Durchmesser gefällt, deren Höhe wir y nennen wollen, so erhält man ein Rektangel. Es läßt sich nun fragen, welches unter allen möglichen solchen Rektangeln das größte sey? Dann jede andere Sehne giebt ein anderes Rektangel.

Das Stück zur Linken, welches durch das von dem zur Linken stehende Perpendikel vom Durchmesser abgeschnitten wird, sey $= x$, so ist $x : y = y : (a - x)$, also $ax - x^2 = y^2$; und wenn F die Fläche des Rektangels bezeichnet, so hat man

$$F = (a - 2x) . \sqrt{(ax - x^2)}$$

F wird also ein Maximum, wenn $(a - 2x) . \sqrt{(ax - x^2)}$ also auch, wenn $(a - 2x)^2 . (ax - x^2)$ ein Maximum wird. Es muß demnach

$$a^3 x - 5a^2 x^2 + 8ax^3 - 4x$$

ein Maximum werden.

Dividirt man nun das Differential dieser Größe mit dx, so wird

$$a^3 - 10 . a^2 x + 24 . ax^2 - 16 . x^3 = 0$$

oder

$$x^3 - 1{,}5 . ax^2 + \tfrac{5}{8} . a^2 x - \frac{1}{16} a^3 = 0 \quad (\text{h}$$

Hier ist, $a = 1$ gesetzt,

$$\alpha = -1{,}5; \beta = \tfrac{5}{8}; \gamma = -\frac{1}{16}$$

Also in (C)

$$\tfrac{2}{9}\alpha^2 + \frac{3\gamma}{\alpha} = \tfrac{2}{9} . \tfrac{9}{4} + \frac{(\frac{3}{16})}{1{,}5} = \tfrac{1}{2} + \frac{2}{16}$$

$$= \tfrac{5}{8}$$

also

$$\frac{2}{9}\alpha^2 + \frac{3\gamma}{\alpha} = \beta$$

und daher

$$x = \frac{1,5}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} - \frac{5}{8}\right)}$$

$$= 0,5 \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$

für den Durchmesser $= 1$, also allgemein

$$x = (0,5 \pm \sqrt{\tfrac{1}{8}}) \cdot a$$

Setzt man $2r$ statt a, so wird

$$x = (1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}) \cdot r$$

Für $r = 1$ ist also

1) $x = 0,3$ sehr nahe

2) $x = 1,7$ sehr nahe

$(x - 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \cdot (x - 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

Wird hiermit der kubische Ausdruck, welcher sich für $a = 2$ aus (♄) ergiebt, dividirt, so wird

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2,5x - \frac{1}{2}}{x^2 - 2x + \frac{1}{2}} = x - 1$$

Demnach auch

$$x - 1 = 0 \text{ und } x = 1$$

welches die 3te Wurzel der kubischen Gleichung ist. Dieser 3te Werth von x giebt das Minimum des Rektangels, welches $= 0$ wird. Man erhält zwar auch für $x = 0$ jenes Rektangel $= 0$; aber für $x = 1$ verschwindet es auf einer Grundlinie, die $= 1$ ist; hingegen für $x = 0$ verschwindet es auf einer Grundlinie, die $= 2$ ist, daß also das eigentliche Minimum, so lange die Natur des Rektangels d. h. die Natur einer Fläche nicht verändert wird, nur zu demjenigen Werthe von x gehört, für den es keine kleinere Gränze als die 1 giebt.

Inhalt.

Erster Theil.

Analysis endlicher Größen. Seite 1 bis 252.

Einleitung. S. 1 — 12.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Bezeichnung der vier Rechnungsarten, der Potenzen und Wurzeln und der verneinten Größen. S. 13 — 38.

Zweites Kapitel.

Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel. S. 39 — 54.

Drittes Kapitel.

Von den Logarithmen. S. 55 — 70.

Viertes Kapitel.

Von den Kombinationen. S. 71 — 75.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Gleichungen. S. 76 — 103.

Sechstes Kapitel.

Von der Auflösung solcher Aufgaben, welche auf Gleichungen vom ersten Grade führen. S. 104 — 135.

Siebentes Kapitel.

Von der Auflösung solcher Aufgaben, welche auf Gleichungen vom zweiten Grade führen. S. 136 — 140.

Achtes Kapitel.

Von der Auflösung kubischer Gleichungen. S. 141 — 164.
Hierzu noch eine Bemerkung in der Vorerinnerung.

Neuntes Kapitel.

Auflösung biquadratischer und höherer auch einiger transscendentischer Gleichungen. S. 165 — 170.

Zehentes Kapitel.

Von arithmetischen und geometrischen Reihen. S. 171 — 185.

Eilftes Kapitel.

Von den figurirten Zahlen und daraus abgeleiteten Reihen. S. 186 — 206.

Zwölftes Kapitel.

Einige wichtige Entwickelungen in Reihen, auch Umkehrungen derselben. S. 207 — 223.

Dreizehentes Kapitel.

Entwickelung der Logarithmen in Reihen. S. 224 — 233.

Vierzehentes Kapitel.

Von Mitteln zu Gleichungen zwischen veränderlichen Größen zu gelangen. S. 234 — 249.

Fünfzehentes Kapitel.

Vom Maximum und Minimum. S. 250 — 252.

Zweiter Theil.

Analysis des Unendlichen. S. 253 — 384.

A. Differentialrechnung. S. 253 — 345.

Erstes Kapitel.

Von den Veränderungen, welche die Form einer Funktion leidet, wenn sich die in der Funktion vorkommenden veränderlichen Größen wirklich oder auch nur im Ausdrucke ändern, und daraus abgeleitete Differentialausdrücke. S. 255 — 285.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Ableitung des binomischen Lehrsatzes. S. 286 — 289.

Drittes Kapitel.

Höhere und partielle Differentialien. S. 290 — 299.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf Umformung der Gleichungen und Entwickelung in Reihen. S. 300 — 318.

Fünftes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf das Maximum und Minimum. S. 319 — 331.

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf Differentialverhältnisse bei Flächen- und Körperänderungen. S. 332 — 334.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung gewisser geraden Linien, deren Lage und Größe von einer gegebenen krummen Linie abhängt. S. 346 — 384.

B. Integralrechnung. S. 346 — 384.

Dritter Theil.

Höhere Geometrie. S. 385 — 462.

Erstes Kapitel.

Die gerade Linie und der Kreis. Auch einige allgemeine Bemerkungen über Linien der zweiten Ordnung. S. 387 — 406.

Zweites Kapitel.

Die Parabel. S. 407 — 417.

Drittes Kapitel.

Die Ellipse. S. 418 — 437.

Viertes Kapitel.

Die Hyperbel. S. 438 — 450.

Fünftes Kapitel.

Einige andere krumme Linien. S. 451 — 462.

Verbesserungen.

S. 44. Z. 9. st. 320 l. 200
— — — 6 von unten st. 320 l. 200
— — — letzte st. $\sqrt{}$ 25900 l. $\sqrt{}$ 25600
— 48. — 7. st. 4,24 l. 4,12
Die Wurzelausziehung ist dort unrichtig
— 50. — 6. st. 385 l. 1385
— 52. — 20. st. 150 l. 750
— 53. — 2. st. 237.... l. 337....
— 62. — 5. statt 3,52.... l. 3,53....
— 65. — 3 von unten st. 0,000009.... l. 0,00009....
— — — 1 — — — 3,5559... l. 3,5560387
— — Hier muß nach Z. 5 so gelesen werden:
Es ist ferner log. 4582 = 3,6610551
Abgez. log. 4581 = 3,6609603
Diff. = 0,0000948

Also

$$B = 4581 + \frac{189}{948} = 4581{,}1994$$

und

$$K = \frac{B}{106} = 0{,}0045811994$$

— 76. Z. 2. von unten $a x^3$ st. $a x^2$
— 84. — 9. im Zähler st. $k . (d - x) . x$ l. $k . (d - x) . x^2$
— 86. — 12. von unten st. $b x^{\frac{1}{1}\frac{3}{2}}$ l. $b x^{\frac{3}{1\,2}}$
— 88. — Hier und an andern Stellen steht oft $\overline{=}$ statt $=$
— 92. — 4. von unten st. $a^3 x^{m-5}$ l. $a^3 x^{m-3}$
— 93. — 3. st. $a^3 x^{m-2}$ l. $a^3 x^{m-3}$
— 96. — letzte §. 52. st. 0,9899.... l. $\frac{10}{7}$. 0,9899...
$\overline{=}$ 1,414213563
— 100. — 5. von unten st. $- a x^4$ l. $- a x^3$
— 102. — 15. st. $- a x$ l. $- a x^2$
— 105 u. 106. (§. 60) im 1ten Exempel statt 100 muß überall 80 stehen.
— 112. Z. 5. st. $n z - w$ l. $n z - a$.
— 117. — 7. st. 38. l. 48

Verbesserungen.

S. 120. Z. 3. von unten st. $\frac{k - a}{g}$ l. $\frac{kx - a}{g}$

— 127. — 5. st. 975 l. 985

— — — 7. st. 25. l. 15

— 128. — 15. st. $s = \frac{S}{s}$ l. $s = \frac{S}{N}$

wo s die Scheffelzahl von Hafer bezeichnet, welche 1 Pferd ziehen soll.

— 136. — letzte Z. st $- a$ l. $- \beta$

— 139. Z. 26. st. Perpendikel l. Perpendikel bis zum Umfange

— 142. — 5. von unten st. $a = \sqrt{}$ l. $a = \sqrt[3]{}$

— 146. — 7. von unten st. $= 8{,}2$ l. $= -8{,}2$

— 157. — 8. st. $\alpha\beta$ l. $2\alpha p$

— 158. — 2. st. 25,062... l. 25,962...

— — — 14. von unten st. der l. den

— 169. — 9. von unten st. wäre l. wären.

— 184. — 6. st. $n + n'$ l. $n + 2n'$

— 191. — 11. st. $2d)$ l. $2d$

— 193. — 2. st. $n + 1$ l. $x + 1$

— 197. — 14. st. $\frac{n.(n+1)}{3}$ l. $\frac{n.(n+1)}{2}$

— 202. — 12. st. $d' = 8$ l. $d'' = 8$

— 273. — 2. st. o l. a

— 275. letzte Z. st. α^2 l. z^2

— 283. Z. 5. st. das l. daß

Erſter Theil

Analyſis endlicher Größen.

Einleitung.

Der Zweck der Schrift bestimmt die Pflichten des Schriftstellers, und die Wahl des Lesers unter verschiedenen Schriften hängt von der Uebereinstimmung des Zwecks seines Studiums mit dem Zweck der ihm vorgelegten Schrift ab. Mein Zweck ist nicht, Lesern dieser Schrift zu zeigen, was die Analysis nach ihrem jetzigen Zustande überhaupt vermag, und zu welchen bewundernswürdigen Kunstgriffen der menschliche Scharfsinn nach und nach in der Analysis gelangt ist; ich trage die Analysis nicht vor, um der Analysis willen, um sie in ihrem vollen Glanze darzustellen und die unermeßliche Ausdehnung bemerkbar zu machen, in der sie sich und ihre Gesetze geltend gemacht hat. Mein Plan ist bei weitem beschränkter, und dieser Plan gründet sich auf die große Verschiedenheit der Lebensverhältnisse, die zwischen mir und anderen ich, kann sagen, zwischen mir und beinahe allen, die über Analysis geschrieben haben, eintreten. Ich hatte frühzeitig, schon als Knabe von 12 Jahren, Vergnügen am Feldmessen, an Maschinen und an mancherlei Bauten, vorzüglich am Wasser. Schon als ein solcher Knabe kam ich in den Besitz von Kästners und Karstens damals erschiene-

nen Werken, und ich lernte durch den bloßen Anblick dieser Werke einsehen, daß zur Erreichung meines Zwecks, auf diesem Wege nützlich werden zu können, algebraische Kenntnisse unumgänglich nothwendig wären. Ich versuchte also nach Wolfs Anfangsgründen IV. Th. die gemeine Algebra ohne Lehrer durchzugehen, und es gelang. Ich schritt dann, ohne Rath, blos weil ich das Buch aus einem Bücherverzeichniß kennen gelernt hatte, zu Eulers vollständiger Anleitung zur Algebra, und auch dieses gelang. Ich wagte mich endlich, immer ohne Beihülfe eines Lehrers, an Kästners Analysis endlicher Größen und es gelang mir zum 3ten mal. Diese Werke hatte ich also ohne Lehrer bis zu Ende meines 16ten Jahres durchgegangen. Dann studirte ich die Differential = und Integralrechnung nach Wolfs Anfangsgründen, die mir darum ewig schätzbar bleiben. Die Begierde, die Kästnerische höhere Mechanik gleichfalls für mich studiren zu können und der wirkliche Versuch, womit ich dieses Studium begann, überzeugte mich bald, daß die Wolfischen teutsche Anfangsgründe noch nicht hinlänglich waren. Darum wagte ich mich nunmehr an das Studium der Kästnerischen Analysis des Unendlichen, die ich auch ohne sonstige Beihülfe durchzuarbeiten vermogte. Ob ich nun gleich späterhin noch andere Schriften benutzte, so fand ich mich doch immer mehr und mehr überzeugt, daß das Kästnerische Werk nicht nur zu allen meinen nachfolgenden theoretischen und praktischen Arbeiten als Grundlage vollkommen genügend, sondern daß es vielmehr noch reichhalti-

ger war, als es dazu hätte seyn dürfen. Freilich kamen mir späterhin manche Integrationen vor, die Kästner nicht lehrt, die aber auch Euler, Lagrange u. a. nicht lehren. Die mannichfaltigen Anwendungen, welche ich in der Folge bei der Bearbeitung praktischer Gegenstände von der Analysis zu machen hatte, belehrten mich am besten von den Gränzen, in die man sich beim Studium derselben beschränken darf, wenn man sie zu gleichem Zwecke studiren will, wie dieses der Fall bei allen Kameralisten ist, die sich mit Theilen der Kameralistik beschäftigen, welche auf Kenntnissen der Mathematik beruhen. Dahin gehört das Maschinenwesen, der Strassen- und Brückenbau, der Wasserbau überhaupt und sonst noch einzelne Theile der Technologie. Blos arithmetische Aufgaben, wie sie z. B. die dem Kameralist und dem Rechtsgelehrten so wichtige politische Arithmetik vorlegt, beruhen auf sehr einfachen Sätzen der gemeinen Algebra, wie man sie in Wolfs Anfangsgründen findet. Nur fordern sie in der Anwendung oft einige Gewandheit, um das Verhalten der unbekannten Größe zu den gegebenen Bestimmungen durch mathematische Zeichen auszudrucken. Diese Gewandheit ist keineswegs Folge tiefer Kenntnisse in der Analysis; sie beruht theils auf natürlichem Scharfsinne, theils auf Fertigkeiten, die man sich durch lange Uebung verschafft, wobei aber eine Anweisung zur Beantwortung mannichfaltiger gut gewählter Fragen die besten Dienste leistet. Gegenstände der Art, wie sie im praktischen Leben vorkommen, die für den Ingenieur und

für den Kameralist überhaupt Interesse haben, oder doch mit Fragen zusammenhängen, ohne deren Beantwortung man in Fällen der Ausübung nicht wohl fortkommen könnte, bestimmen den Plan dieses Werkchens. Die höchste Stufe, bis zu der ich hier den Schüler der Analysis begleite, liegt also unter der, zu welcher die Werke eines Euler, Lacroix, Lagrange, Laplace u. a. führen; aber sie liegt hoch genug, um von ihr ins praktische Leben zu schreiten; hoch genug, um alles, was mir irgendwo in Schriften anderer Analytiker brauchbares für die Ingenieurwissenschaften und gesammte Kameralistik vorgekommen ist, und was ich selbst seit 38 Jahren dahingehöriges geschrieben habe, ohne Schwierigkeit lesen zu können. Noch mehr!

Ich habe zugleich einige Rücksicht auf diejenigen genommen, welche aus Liebe zur Wissenschaft in der Folge etwa noch weiter zu gehen Lusten hätten. Eines und das andere habe ich daher hier nur zur Vorbereitung zum allenfallsigen Studium anderer Werke beigefügt, oder auch um die Leser, denen es nur um die künftige Anwendung zu thun ist, von der Nutzlosigkeit mancher Lehren durch das eigene Studium derselben zu überzeugen und ihnen den Gedanken zu benehmen, als ob ihnen eine Sache von Wichtigkeit vorenthalten worden wäre, wenn sie dergleichen von andern Ingenieuren oder Schülern der Analysis darüber reden hören. Dahin gehört vorzüglich die allgemeine Auflösung kubischer Gleichungen, die durchaus keinen praktischen Nutzen hat. Daß es uns an einem Lehrbuche der Art fehlt, müssen selbst die

Verfasser der neuesten Lehrbücher der Analysis eingestehen, von welchen ich z. B. die Herren Thibaut und Crelle zu nennen keinen Anstand nehme. Ihr Plan ist von dem meinigen sehr verschieden. Sie bauen für den Luxus, indeß ich mich mit einem bürgerlichen Wohnhause begnüge, das seinen Bewohner, der keinen Luxus liebt, vollkommen befriedigt.

Ich hätte dieser Schrift schlechthin den Titel einer Anleitung zur Algebra gegeben, wenn nicht diese Benennung in neueren Zeiten wie mehrere andere z. B. die eines Professors (worunter man auch einen Mensch versteht, welcher Knaben lateinisch lesen, dekliniren und konjugiren lehrt) zwei = oder überhaupt vieldeutig geworden wäre. Die erste Einführung der Benennung Algebra gründet sich auf keinen festen Begriff von ihr. Erst späterhin stimmten die Mathematiker ziemlich darin zusammen, denjenigen Theil der Arithmetik darunter zu verstehen, welcher lehre, wie sich aus einem arithmetischen Ausdruck, welcher das Verhalten zwischen gegebenen und der noch unbekannten Größe allgemein angiebt, diese unbekannte Größe ableiten lasse, oder mit andern Worten, wie sich unbekannte Größen aus gegebenen Gleichungen finden lassen. Bezeichnet z. B. x die unbekannte Größe, und soll $3 . x = 12$ seyn, so findet man $x = \frac{12}{3} = 4$. So setzt also die Algebra allemal eine gegebene Gleichung voraus. In sehr vielen Fällen wird solche auch unmittelbar durch die in der vorge-

legten Aufgabe enthältenen Bestimmungen gegeben, so daß die Darstellung einer Gleichung zwischen gegebenen und unbekannten Größen durchaus keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Nach und nach fühlte man aber mit der größeren Ausdehnung, die man dieser Rechnung in Bezug auf Mannichfaltigkeit der Gegenstände ihrer Anwendung gab, immer mehr die Beschränktheit ihres Gebrauchs in der Voraussetzung, daß die Gleichung zwischen bekannten und unbekannten Größen gegeben sey.

In unzähligen Fällen fand man gerade darin die Hauptschwierigkeit, erst zu einer solchen Gleichung zu gelangen, so daß man die Rechnung beinahe schon als vollendet ansah, sobald man nur eine solche Gleichung gefunden hätte. Man beschäftigte sich daher ganz vorzüglich seit dem letzten Viertheile des 17ten Jahrhunderts damit, die bis dahin sehr beschränkt gewesenen Gränzen der Algebra in der Hinsicht zu erweitern, daß sie selbst Mittel an die Hand geben sollte, in schon gedachten Fällen zu einer Gleichung zwischen gegebenen und gesuchten Größen zu gelangen, und die ihr so zugewachsenen neuen Lehren machten bald ihren wichtigsten Theil aus, den man dann insbesondere oder auch in Verbindung mit der gemeinen (der mangelhaften älteren) Algebra mit dem neuen Namen der Analysis belegte. Vorzüglich gehören hierhin die äußerst fruchtbare Lehre von den unendlichen Reihen und die höchstwichtige Erfindung der Differential- und Integralrechnung. Die Differentialrechnung bestimmt das Verhältniß von

Produkten für den Fall, wann in diesen Produkten gewisse Faktoren verschwinden oder = o werden; die Integralrechnung lehrt, wie sich aus solchen Verhältnissen Gleichungen zwischen gegebenen und gesuchten Grösßen ableiten lassen, welches in einigen Fällen auch schon die Differentialrechnung leistet. Beide machen zusammen einen eigenen Theil der Analysis aus, den man mit dem Namen der Analysis des Unendlichen belegt hat und unter dieser Benennung von dem vorangehenden Theile, der Analysis endlicher Grösßen, unterscheidet. Inzwischen giebt es Mathematiker, denen die Algebra eine allgemeine Benennung ist, welche die Lehre von Auflösung gegebener Gleichungen (die gemeine Algebra), die Analysis endlicher Grösßen und die des Unendlichen unter sich begreife. Oft wird auch die Analysis des Unendlichen die höhere Analysis genennt. Kästners Analysis endlicher Grösßen begreift die gemeine Algebra mit unter sich, und ich werde seinem Sprachgebrauche folgen. Die wichtigsten hierhergehörigen Werke sind:

Wolf Elem. mathes. vniuersae 1730 — 1741.

Karsten Mathesis theoretica elementaris atque sublimior. 1760.

Kästner Anfangsgr. d. Analys. endl. Grösßen 1794.

Dess. Anfangsgr. d. Anal. d. Unendl. 1799.

Bürja der selbstlernende Algebrist 1786.

Pasquich Elementa analyseos.

L'Huilier Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. 1795.

Euler vollständige Anleit. zur Algebra, 2 Theile 1770, und 3ter Th. enthaltend die Zusätze von Lagrange, herausgegeben von Kausler 1796.

Id. Introductio in analysin infinitorum 2 Tom. 1748 (auch 1797).

Id. Institutiones calculi differentialis 1755.

Id. Inst. calc. integralis 3 Tom. 1768.

Auch hat man in Uebersetzungen mit Anmerk.

Euler Einleit. in die Anal. d. Unendl. übersetzt von Michelsen 1788 u. 1791.

Dess. vollständige Anleit. zur Differentialrechnung von Michelsen 1790 u. 1793.

Hierzu ein Supplementband von Grüson 1798.

Ferner

Lagrange Théorie des fenctions analytiques 1797.

Hiervon eine Uebersetzung von Grüson 1798.

Lacroix Du calcul differentiel et du calcul integral 1797.

Hiervon hat man jetzt eine neuere Ausgabe, auch eine Uebersetzung (nach der 1ten Ausgabe) von Grüson, die aber leider durch ein Heer von Schreib- oder Druckfehlern ganz entstellt ist.

Arbogast Du calcul des derivations 1800.

Fischer Grundriß der gesammten reinen höheren Mathem. 1807 u. 1809.

Schmidts Analysis 1805.

Thibaut Grundriß der allgemeinen Arithm. oder Analysis 1. Theil 1809.

Crelle Versuch einer rein algebraischen und dem gegenwärtigen Zustande der Mathem. angemessenen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen, 1r Bd. 1813.

Wer irgend eine dieser Schriften dem Zwecke seines Studiums angemessener findet, als die meinige, der wird ohne meinen Rath so klug seyn, solche zu seinem Wegweiser zu wählen. Wer die meinige gewählt und durchgegangen hat, dann aber, nicht um künftiger Anwendungen willen, sondern aus Liebe zur Analysis, um ihrer selbst willen, weiter zu gehen wünscht, der nehme dann das angezeigte Werk von Lacroix zur Hand, und hiernächst, wenn er einen großen Theil seines Lebens der Analysis zu widmen beschlossen hat, Eulers angeführte Werke und nebenbei das Werk von Arbogast. Hindenburgs kombinatorische Analytik, die in Teutschland vieles Aufsehen unter den Analytikern gemacht hat, indeß sie von den französischen Mathematikern ganz ignorirt wird, lernt man aus Grüsons angeführtem Supplementband zu Eulers Werke (auch aus Weingärtners und Stahls Schriften über diesen Gegenstand) und in ihrer Anwendung auf einzelne Gegenstände der Analysis aus dem angeführten Werk von Thibaut kennen. Ich habe nie Gelegenheit (noch weniger Nothwendigkeit) gehabt, sie anzuwenden, wohl aber habe ich sie einigemal angewender gefunden, wo weit einfachere, leichtere und ganz bekannte Mittel, dazu auf kürzerem Wege, zu demselben Resultate führten. Meinem Plane getreu habe ich daher auch

von dieser Lehre der Analysis hier nichts vorgetragen. Sind irgendwo in Bezug auf Gegenstände in der Ausübung Anwendungen davon gemacht worden, die sich ohne sie nicht oder doch nur mit größerer Schwierigkeit hätten machen lassen, so gestehe ich gerne, daß mir solche ganz unbekannt geblieben sind. Wenn ich übrigens gleich der Eintheilung der Analysis in die endlicher Größen und des Unendlichen nicht billigen kann, so habe ich solche doch mit Euler von Segner, Käſtner u. a. beibehalten.

Anfänglich war es mein Vorsatz, blos Analysis vorzutragen. Erst, da die Integralrechnung beinahe geendigt war, änderte ich hierin meinen ersten Plan, daher man einige Lehren in der Differentialrechnung findet, die ich sonsten zur höheren Geometrie verspart haben würde. Da ich durchaus in dieser Schrift den praktischen Nutzen vor Augen hatte, so habe ich mich auch in diesem letzten Theile nur auf die nützlichsten Lehren beschränkt; doch mußte ich um des Zusammenhangs willen manche Sätze beifügen, die auf die Ausübung gar keinen Bezug haben. Ich that dieses um soviel lieber, weil sie doch immer geometrische Wahrheiten aussprechen, die für den Verstand einen vorzüglichen Reiz haben und von demselben immer mit Vergnügen und mit Begierde aufgefaßt werden, wie z. B. die meisten Sätze, welche sich auf die Eigenschaften der Hyberbel beziehen.

Erster Theil
Analysis endlicher Größen.

Erstes Kapitel.
Allgemeine Bezeichnung der vier Rechnungsarten, der Potenzen und Wurzeln und der verneinten Größen.

§. 1.

Zur Bezeichnung bestimmter Mengen von Einheiten bedient man sich der bekannten zehen Zahlzeichen oder Ziffern. In der Analysis hat man es, um für alle Fälle passende Resultate zu finden, die auf keine bestimmte Quantitäten beschränkt sind, mit keinen bestimmten Mengen zu thun; man bedient sich daher, statt der Zahlzeichen, der lateinischen, griechischen oder auch selbst der teutschen Buchstaben; meistens aber der kleinen lateinischen. Man hat sich also an der Stelle der Buchstaben immer Zahlen zu denken, die wir dafür zu substituiren haben. Da auf solche Weise unter einem Buchstaben jede beliebige Zahl gedacht werden kann, so sieht man von selbst ein, daß sich durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verschiedener Buchstaben keine bestimmte Quantitäten ergeben können. a zu b addirt heißt im Allgemeinen soviel als zwei Zahlen zusam-

men addirt, die also, so lange die Zahlen unbestimmt sind, keine bestimmte Summe geben können. Ebenso verhält es sich mit den übrigen Rechnungsoperationen. Daher können auch mit Buchstabenausdrücken keine Rechnungsoperationen vorgenommen werden, sondern man kann durch sie nur angeben, was für arithmetische Operationen mit den Zahlen, deren Stellvertreter die Buchstaben sind, vorgenommen werden sollen. Zur Bezeichnung der vorzunehmenden verschiedenen Operationen bedient man sich aber derselben Zeichen, welche schon in der Zahlenarithmetik bekannt gemacht werden. Nämlich

Zur Bezeichnung der Addition, daß nämlich die folgende Größe zur vorhergehenden addirt werden soll

das Zeichen +

Zur Bezeichnung der Subtraktion, daß nämlich die folgende abgezogen werden soll,

das Zeichen —

Zur Bezeichnung der Multiplikation, daß nämlich die folgende mit der vorhergehenden (oder umgekehrt, welches einerlei ist) multiplicirt werden soll,

die Zeichen × oder .

Nur ist hier noch besonders zu bemerken, daß die Multiplikation auch durch das Nebeneinandersetzen der Buchstaben ohne alles Zeichen ausgedruckt wird.

Zur Bezeichnung der Division, daß nämlich die zuerst stehende Größe durch die nachfolgende dividirt werden soll,

das Zeichen :

oder auch durch die Bezeichnung eines Bruchs, wo der Dividend von dem darunter geschriebenen Divisor durch einen Querstrich abgesondert wird.

Das Zeichen der Gleichheit ist =

Das der Unendlichkeit ist ∞

Hätte man z. B. die Ausdrücke

I. $(a + b - c) . d + e$

II. $\left(ab + cd - \frac{m}{a}\right) . e - f : g$

III. $\frac{a : e + bc - d : f + gxy}{h - m : n} \times p - q$

so werden hiermit Quantitäten bezeichnet, welche von den numerischen Werthen der einzelnen Buchstaben d. h. von Zahlen abhängen, welche statt der einzelnen Buchstaben gesetzt werden. Es sey z. B.

für No. I. $a = 3$; $b = 7$; $c = 2$; $d = 4$; $e = 64$;

No. II. $a = 4$; $b = 2$; $c = 7$; $d = 9$; $m = 20$;
$e = 6$; $f = 40$; $g = 5$;

No. III. $a = 10$; $e = 2$; $b = 1$; $c = 8$; $d = 30$;
$f = 10$; $g = 2$; $x = 1$; $y = 8$; $m = 30$;
$n = 6$; $p = 4$; $q = 6$; $h = 20$;

so erhält man für die 3 Ausdrücke folgende numerische Werthe

I. $(3 + 7 - 2) . 4 + 64 = 8 . 4 + 64 = 32 + 64 = 96$

II. $\left(4 . 2 + 7 . 9 - \frac{20}{4}\right) . 6 - 40 : 5 = (8 + 63 - 5) . 6 - 8$
$= 66 . 6 - 8 = 396 - 8 = 388.$

III. $\frac{10 : 2 + 1 . 8 - 30 : 10 + 2 . 1 . 8}{20 - 30 : 6} \times 4 - 6$

$= \frac{13 - 3 + 16}{20 - 5} \times 4 - 6 = \frac{26}{15} . 4 - 6$

$= 6\frac{14}{15} - 6 = \frac{14}{15} = 0,93333 \ldots$

1. Anm. Bei algebraischen Berechnungen bedient man sich allgemein der Decimalbrüche

2. Anm. Sollen mehrere durch die Zeichen + oder — mit einander verbundene Größen als eine einzige

angesehen werden, so müßen solche allemal in eine Parenthese eingeschlossen seyn. Z. B.

$$20 - 7 + 8 = 13 + 8 = 21$$

hingegen

$$20 - (7 + 8) = 20 - 15 = 5$$

Ebenso

$$60 + 24 . 6 - 4 = 60 + 144 - 4 = 200.$$

hingegen

$$(60 + 24) . 6 - 4 = 84 . 6 - 4 = 504 - 4 = 500.$$

und

$$60 + 24 . (6 - 4) = 60 + 24 . 2 = 60 + 48 = 108$$

wo die verschiedenen Parenthesen ganz verschiedene Werthe geben. Man muß daher auf die Stellen der Parentheszeichen sehr aufmerksam seyn.

§. 2.

Außer Summen (wie a + b), Unterschieden oder Differenzen (a — b), Produkten (a × b, a . b, ab, wo a und b Faktoren genennt werden) und Quotienten ($\frac{a}{b}$, a : b) erhält man durch arithmetische Operationen auch noch Potenzen (Dignitäten, Potestäten) und Wurzeln. Eine Potenz ist ein Produkt gleicher Faktoren z. B. 3 . 3; 2 . 2 . 2; 4 . 4 . 4 . 4 u. s. f. Weil solche Potenzen sehr häufig vorkommen, so hat man für sie eine abgekürzte Schreibart eingeführt. Statt der vorstehenden Ausdrücke schreibt man 3^2; 2^3; 4^4 u. s. f. So auch a^2, b^3, c^4 statt aa, bbb, cccc u. s. f. wo man sagt a von der 2ten Potenz, b von der 3ten, c von der 4ten u. s. f. x^n ist x von der nten. Der Faktor, welcher mehrmals in der Potenz vorkommt, heißt die Wurzel der Potenz; die zur Rechten aufwärts neben der Wurzel

geschriebene Zahl heißt der Exponent der Potenz. Die 2te Potenz heißt auch das Quadrat, die 3te der Kubus. Noch höhere nennt man schlechthin die 4te, 5te ... nte Potenz. Das Zeichen der Wurzel ist $\sqrt{}$; z. B. $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{256}$ ist soviel als 2 und 4, weil $2^3 = 8$, $4^4 = 256$ ist. Ueberhaupt ist $x = \sqrt[n]{a}$, wenn $x^n = a$ ist. Die Quadratwurzel aus a wird schlechthin durch $\sqrt{a}$ ausgedruckt z. B. $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{100} = 10$, weil $2^2 = 4$; $10^2 = 100$ ist.

§. 3.

Größen, die in Bezug auf einen bestimmten Begriff einander so entgegengesetzt sind, daß eine die andere vermindert, heißen entgegengesetzte Größen; die eine von ihnen wird als eine bejahte, die andere in Bezug auf denselben Begriff als eine verneinte betrachtet. Wer z. B. 900 Gulden Vermögen und 300 Gulden Schulden hat, wird so betrachtet, als hätte er 900 fl. bejahtes und 300 fl. verneintes Vermögen. Beides zusammen giebt 600 Gulden reines Vermögen. Wer von einer bestimmten Stelle 60 Fuß vorwärts geht, und dann wieder 36 Fuß rückwärts, hat zwar einen Weg von 96 Fuß durchlaufen, aber in Bezug auf die Bewegung vorwärts ist er nur 24 Fuß weit gekommen. Die 60 vorwärts kann man als bejahte Größe, in Bezug auf das Vorrücken betrachten, dann gelten die 36 rückwärts als verneinte Größe (als verneintes Vorrücken), weil durch sie das Vorrücken im Ganzen vermindert wird. Die verneinte ist also nicht etwa verneinte Quantität (denn für den Begriff von Quantität giebt es keinen entgegengesetzten), sondern eine Quantität, die sich auf einen Begriff bezieht, welche dem, worauf die bejahte Größe bezogen wird, gerade entgegengesetzt ist, und daher in Zusammensetzung mit der bejahten

diese vermindert. Darum heißen verneinte Größen auch subtraktive, und ebendarum bezeichnet man sie auch mit dem Subtraktionszeichen (—) z. B. — 1000 Gulden Vermögen bezeichnet 1000 fl. Schulden; — 1000 Gulden Schulden sind 1000 fl. Vermögen, indem man Schulden als das bejahte betrachtet, und Vermögen, welches allemal die Schulden vermindert, als das Verneinte. Verneinte Quantität, als bloße Quantität, bezeichnet allemal etwas unmögliches.

§. 4.

Es ist hiernach einerlei, ob man schreibt $8 + (-3)$ oder geradezu $8 - 3$; jenes nennt man auch Summe entgegengesetzter Größen, die mit ihrer Differenz einerlei ist. Ebenso ist $a + (-b) = a - b$; und umgekehrt kann man statt $a - b$ auch $a + (-b)$ setzen. Nimmt man hingegen vom ganzen Bestand einer Größe einen Theil weg, der das Ganze verminderte, so wird hiermit der Bestand des Ganzen offenbar vergrößert. Man denke sich einen Vermögensbestand von 1000 fl. Kapital und 400 fl. Schulden, also reines Vermögen von 600 fl. Werden die 400 fl. Schulden weggenommen oder abgezogen, so bleiben $1000 + (-400) - (-400)$ oder volle 1000 fl. Es ist so gut, als ob zu den 600 fl. noch 400 addirt würden. Eine verneinte abziehen heißt also soviel als eine, die der verneinten gleich und entgegengesetzt ist, addiren, oder es ist $a - (-b) = a + b$. Es ist allemal $a - (-b) = a + b - b - (-b) = a + b + (-b) - (-b) = a + b$. Daß übrigens Größen von einerlei Art zusammen addirt allemal die Summe der einzelnen Quantitäten von derselben Art giebt, fällt von selbst ins Auge. Z. B. $12 + (-3) + (-7) = 12 + (-10) = 12 - 10$; $a + (-b) + (-c) = a - (b + c)$.

§. 5.

Steht eine Zahl vor Buchstaben, so ist solche allemal als Faktor zu betrachten z. B. 3a ist soviel als 3 mal a. Kommt nun in einer Reihe von Größen, die mit + und — zusammenhängen, und die dann Glieder des ganzen Ausdrucks genennt werden, ein Glied mehrmalen vor, so können hiermit bei entgegengesetzten Zeichen mehrere Glieder ganz verschwinden oder doch, welches bei einerlei Zeichen allemal der Fall ist, in ein Glied zusammengezogen werden.

Beispiele zur Addition.

I. $3a + 2b - 6c + d - e + 10m + 3k$
$a - 3b + 4c - d + e - 7m$

$4a - b - 2c + 3m + 3k$

II. $7a - 18b - 3c - 16d + 8e + f - 7g$
$8a - 3b - 4c + 18d - 9e - f$

$15a - 21b - 7c + 2d - e - 7g$

Beispiele zur Subtraktion.

I. $6a - 34b - 7c + d + 4e - f + 7g - k$
$8a - 32b + 4c + d + 2e + m - n$

$-2a - 2b - 11c + 2e - f + 7g - k$
$- m + n$

Wer 6000 fl. hat und 8000 fl. zahlen soll, dem bleiben noch 2000 fl. Schulden oder — 2000 fl. Vermögen. Wer auf 34 fl. Schulden (— 34 Vermögen) 32 fl. abbezahlt also 32 fl. Schulden wegnimmt, behält noch 2 fl. Schulden oder — 2 fl. Vermögen u. s. f.

Anm. Man muß sich dieses Verfahren bei der Addition und Subtraktion vollkommen geläufig machen, bevor man weiter geht; nicht blos mechanisch geläufig, sondern mit beständigem Bewußtseyn der Gründe, wor-

auf das Verfahren beruht. Geht z. B. Jemand von einer bestimmten Stelle 6 Fuß vorwärts und dann wieder 4 Fuß rückwärts, so beträgt das Vorrücken am Ende $6 - 4 = 2$ Fuß. Daher ebenso, wenn die rückgängige Bewegung 8 Fuß beträgt, so ist das Vorrücken noch $6 - 8 = -2$ Fuß. Er ist in verneintem Sinne am Ende 2 Fuß vorgerückt d. i. um 2 Fuß rückwärts gekommen. Das Verfahren mit bejahten und verneinten Größen läßt sich durch ganz verschiedene Vorstellungsarten begreiflich machen. Z. B.

$$\begin{array}{rl} & 38 - 14 \\ \text{Abgez.} & 26 - 16 \\ \hline & 12 - 14 + 16 = 14 \end{array}$$

Indem man hier gleich anfänglich 26 von 38 abzieht, zieht man in Bezug auf das Ganze zu viel ab, weil man die 26 nicht ganz sondern nur 26 weniger 16 abziehen soll, es müssen also die zu viel abgezogenen 16 im Rest wieder hinzu gerechnet werden.

II.
$$\begin{array}{r} 24a - 16x + 13p - 10y - z \\ 18a + 4x - 7p - 2y + z - q \\ \hline 6a - 20x + 20p - 8y - 2z + q \end{array}$$

§. 6.

Multipliciren heißt eine Größe sovielmal nehmen, als eine gegebene Zahl Einheiten enthält. Mit einer benamten Zahl kann nicht multiplicirt werden; man kann z. B. 100 fl. Vermögen nicht 3 fl. Schulden mal nehmen, oder nicht Vermögen mit Schulden multipliciren. Wohl aber können z. B. 3 fl. Schulden 100 mal genommen, oder -3 mit 100 multiplicirt werden. Das Produkt $100 \times (-3)$ ist offenbar -300 oder 300 fl. Schulden. Dabei ist aber 100 eine absolute Zahl, die sich nicht auf 100 fl. Vermögen be-

zieht. Geht Jemand 3mal 25 Fusse vorwärts und wieder 7 . 25 Fuß rückwärts, so ist er in allem (3 — 7) . 25 Fuß vorwärts gekommen d. i. (— 4) × 25 Fuß vorwärts. Eine solche Multiplikation wäre ohne Sinn, wenn — 4 hier als benamte Zahl, nämlich als 4 Fuß Rückgang genommen würde, denn 25 Fuß lassen sich nicht 4 Fuß Rückgang mal nehmen. Die 25 Fuß werden mit der absoluten Zahl 4 multiplicirt; das verneinte Zeichen bei — 4 zeigt nur an, daß die 25 Fuß 4mal in einem Sinne genommen werden sollen, der dem, worauf sich die 25 Fuß beziehen (nämlich dem des Vorrückens) gerade entgegengesetzt ist, so daß (— 4) × 25 Fuß mit 25 × (— 4) Fuß ganz einerlei ist. Man hat also ein Produkt wie (— a) × b allemal als ein Produkt aus einer absoluten Zahl in eine verneinte Größe zu betrachten, die nothwendig ein verneintes Produkt — (ab) giebt. Soll — 4 mit — 25 multiplicirt werden, so kann nur der eine dieser beiden Faktoren als verneinte also als benamte Zahl genommen werden, die soviel mal genommen werden soll, als der andere Einheiten enthält; weil aber der andere gleichfalls das verneinte Zeichen (—) vor sich hat, so wird hiermit bedeutet, daß die benamte Zahl sovielmal im entgegengesetzten Sinne also als bejahte Zahl genommen werden soll, soviel der andere Faktor Einheiten enthält. Hiernach ist also (— 3) × (— 4) = 12; (— a) × (— b) = ab.

Beispiele zur Multiplikation.

I.

	a	+	b	
	m	+	n	
ma	+ mb	+	na	+ nb

II.

	a	+	b	
	m	—	n	
ma	+ mb	—	na	— nb

III. $\begin{array}{r} a - b \\ m - n \\ \hline ma - mb - na + nb \end{array}$

IV. $\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab + ab + b^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$

V. $\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab - ab - b^2 \\ = a^2 - b^2 \end{array}$

Anm. Dieses Produkt aus der Summe zweier Größen in ihre Differenz, welches die Differenz von den Quadraten der beiden Größen giebt, hat man sich wegen seines häufigen Vorkommens wohl zu merken.

VI. $\begin{array}{r} 2a + 3b - 2c \\ 3a - b + 4d \\ \hline 6a^2 + 9ab - 6ac \\ - 2ab - 3b^2 + 2bc \\ + 8ad + 12bd - 8cd \\ \hline = 6a^2 + 7ab - 6ac - 3b^2 \\ + 2bc + 8ad + 12bd - 8cd \end{array}$

VII. $\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$

§. 7.

Keine Größe kann durch eine benamte Größe dividirt werden. Ein Ausdruck wie $\frac{12 \text{ fl. Vermögen}}{3 \text{ fl. Schulden}}$ wäre sinnlos. Eine verneinte Größe kann aber nur als benamte Größe

d. h. nur als Größe einer bestimmten Art gedacht werden; es kann also ein solcher Ausdruck wie $\frac{12}{-4}$ bei ordentlicher Rechnung nie vorkommen d. h. nie in dem Sinne, daß damit die Zahl gemeint sey, welche ausdrucke, wievielmal z. B. 4 fl. Schulden in der Zahl 12 oder auch in 12 fl. Vermögen enthalten sey. Nur das gewöhnliche arithmetische Verfahren, nach welchem bejahte und verneinte Größen überhaupt als Zahlen behandelt werden, kann auf einen solchen Ausdruck führen. Dann gilt aber wieder die arithmetische Regel, daß ein Bruch unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner mit einerlei Faktor multiplicirt werden. Multiplicirt man nun $\frac{12}{-4}$ im Zähler und Nenner mit -1, so erhält man $\frac{-12}{4}$ d. h. die verneinte oder benannte Größe -12 mit der absoluten Zahl 4 dividirt. Der Quotient ist der 4te Theil von -12, also offenbar -3. Man muß daher allemal $\frac{a}{-b}$ durch die Multiplikation im Zähler und Nenner mit -1 in den Ausdruck $\frac{-a}{b}$ verwandelt denken, wo dann b als absolute Zahl betrachtet werden muß. Zwei entgegengesetzte Größen durch einander dividirt geben also allemal einen verneinten Quotient 1000 fl. Schulden durch 5 dividirt geben 200 fl. Schulden, oder

$$\frac{-1000}{5} = -200, \text{ und } \frac{1000}{-5} = \frac{-1000}{5} = -200$$

§. 8.

Wenn gleich $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ nur arithmetische Operationen bezeichnen, welche vorgenommen wer-

den sollen, die aber dann erst vorgenommen werden können, wann numerische Werthe statt der Buchstaben substituirt werden, so lassen sich doch Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten zusammengesetzter Größen d. h. solcher die aus mehr als einem Gliede bestehen, zuweilen auf einfachere Formen bringen, wie man dieses schon bei obigen Beispielen wahrnehmen kann. Doch geschieht auch solches nicht durch eigentliche Rechnungsoperationen, sondern nur durch Auflösung in einzelne Glieder. Z. B. a + b kann mit a — b nicht wirklich multiplicirt werden, man kann nur zeigen, welche einzelne Multiplikationen dabei zu machen sind, und die Darstellung dieser 4 einzelnen Multiplikationen (aa + ab — ab — bb) zeigt erst, ob und welche einzelne Glieder einander aufheben. Dieses ist auch zuweilen der Fall bei der Division, so daß es dann das Ansehen hat, als würde die Division wirklich vorgenommen. Man verhält sich auch dabei wie bei der wirklichen Division in Zahlen.

Beispiele zur Division.

I. $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$.

Divisor	Dividend	Quotient
a + b	$a^2 + 2ab + b^2$	a + b
	$a^2 + ab$:	
	* $ab + b^2$	
	$ab + b^2$	
	* *	

II. $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$.

Divisor	Dividend	Quotient
a + b	$a^2 - b^2$	a — b
	$a^2 + ab$	
	* $- ab - b^2$	
	$- ab - b^2$	
	* *	

III. $\frac{2am - 14cm - an + 7cn + 4bm - 21cp - 2bn + 3ap + 6bp}{a + 2b - 7c}$

Divisor	Dividend								Quotient
$a+2b-7c$	$2am+4bm-14cm$	$-an$	$-2bn$	$+7cn$	$+3ap$	$+6bp$	$-21cp$		$2m-n+3p$
	$2am+4bm-14cm$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
	* * *	$-an$	$-2bn$	$+7cn$	⋮	⋮	⋮		
		$-an$	$-2bn$	$+7cn$	⋮	⋮	⋮		
		* * *			$3ap$	$+6bp$	$-21cp$		
					$3ap$	$+6bp$	$-21cp$		
					* * *				

Man sieht, daß der Dividend hier anders geordnet ist, als im vorgegebenen Beispiel. Diese Anordnung geschieht so, daß man den gegebenen Dividend zuerst in verschiedene Klassen theilt; die erste (hier $2am + 4bm - 14cm$) erhält allemal soviel Glieder als der Divisor hat (hier 3), und man nimmt dazu solche Glieder, in welchen die im Divisor nach einander folgenden Buchstaben vorkommen, auch in derselben Ordnung (wie hier a, b und c); zur zweiten Klasse nimmt man wieder ähnliche Glieder, auch wieder ebensoviele, wenn der Dividend soviele der Art enthält (hier $-an - 2bn + 7cn$ welche wieder nach der Ordnung des Divisors die Größen a, b, c enthalten) u. s. f. Nach dieser Anordnung schreitet man zur Division, indem man (wie bei der Zahlendivision) jedesmal nur das erste Glied des Dividends (oder eines herabgelassenen

Theils) mit dem ersten Gliede des Divisors dividirt. Hier also sagt man 2am dividirt durch a giebt 2m (weil 2m mit a multiplicirt 2am giebt). Die Größe 2m giebt das 1te Glied im Quotient. Mit diesem wird der ganze Divisor multiplicirt, und das Produkt (hier 2am + 4bm — 14cm) von den darüber stehenden Gliedern abgezogen. (Hier in unserem Beispiele bleibt kein Rest). Man läßt nun die folgende Klasse herab, die mit dem gebliebenen Reste soviele Glieder giebt, als Glieder im Divisor vorkommen. Hier, wo kein Rest blieb, enthält daher die 2te Klasse 3 Glieder (— an — 2bn + 7cn). Man sagt jetzt wie vorhin — an durch a dividirt giebt — n, weil — n mit a multiplicirt — an giebt); diese — n ist jetzt der 2te Theil des Quotienten, der wieder mit dem ganzen Divisor multiplicirt — an — 2bn + 7cn giebt. Dieses Produkt von den darüber stehenden Gliedern abgezogen giebt wieder o zum Rest. So fährt man fort, und findet dann das 3te Glied des Quotienten (hier das letzte + 3p).

Anm. Soll eine solche Division möglich seyn, so daß sie am Ende ohne Rest aufgeht, so versteht es sich von selbst, daß alle Buchstaben des Divisors auch im Dividend vorkommen müssen. Ob nun gleich diese Bedingung allein noch nicht hinlänglich ist, sondern auch noch ein ganz besonderes Verhalten zwischen den Gliedern des Dividends und denen des Divisors erforderlich ist, so kommt man doch zuweilen unvermuthet auf solche Fälle. Zuweilen ereignet es sich, daß die Division ohne Ende fortgesetzt werden kann, und im Quotient eine unendliche Reihe fortlaufender Glieder giebt, welche nach einem leicht ins Auge fallenden Gesetze nach einander folgen. Solche Quotienten sind oft sehr brauchbar, wenn nämlich die folgenden Glieder immer vielmal kleiner werden, als die verherge-

henden, so daß nur wenige Glieder dem Werthe des vollständigen Quotienten sehr nahe kommen. Ich füge hierzu einige Beispiele bei.

IV.) $\frac{x}{x-y}$

Divisor	Dividend	Quotient
$x-y$	x	$1+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}\ldots\ldots$

$$\frac{x-y}{*+y}$$

$$\frac{y-\frac{y^2}{x}}{*+\frac{y^2}{x}}$$

$$\frac{\frac{y^2}{x}-\frac{y^3}{x^2}}{*+\frac{y^3}{x^2}}$$

$$\frac{\frac{y^3}{x^2}-\frac{y^4}{x^3}}{*_1+\frac{y^4}{x^3}}$$

Hier fällt das Gesetz, nach welchem die Glieder des Quotienten fortschreiten, sogleich ins Auge, so daß man ohne weiter zu dividiren soviele Glieder hinzu setzen kann, als man will $\frac{y^4}{x^4}+\frac{y^5}{x^5}+\frac{y^6}{x^6}+$ ꝛc. Wäre nun x bedeutend größer als y, so würden nur wenige Glieder den Werth des vollständigen Quotienten schon sehr genau geben.

Es sey z. B. $x=10$, $y=1$, also $\frac{x}{x-y}=\frac{10}{9}$, so hätte man

$$\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \text{&c.}$$

Ueberhaupt erhält man also hieraus auch die Summe einer unendlichen Reihe von Gliedern von der Form

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \text{etc. in infin.}$$

$$+ \frac{x}{x-1}$$

indem man oben nur $y = 1$ setzen darf. Z. B. für $x' = 2$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{2}{2-1} = 2$$

für $x = 3$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \text{etc.} = \frac{3}{3-1} = 1,5.$$

Bei jeder Division, die nicht aufgeht, erhält man den Quotient, nach welchem noch Rest geblieben ist, vollständig, wenn man zu dem gefundenen noch einen Bruch addirt, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der zur Division gehörige Divisor ist. Im Beispiele (IV) folgt nach dem dort berechneten Quotient noch der Rest $+ \frac{y^4}{x^3}$; der Quotient ist also vollständig

$$1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{\left(\frac{y^4}{x^3}\right)}{x-y}$$

Dieses Ergänzungsglied $\frac{y^4}{x^3 . (x-y)}$ kann also nur dann bei Seite gesetzt werden, wann es in Vergleichung mit dem übrigen Theil das Quotienten unbedeutend ist.

V. $\frac{x}{x+y}$.

Divisor	Dividend	Quotient
$x+y$	x	$1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}\ldots\ldots$

$$\begin{array}{r}
x+y \\
\hline
* \quad -y \\
\quad -y-\frac{y^2}{x} \\
\hline
* \quad +\frac{y^2}{x} \\
\quad \frac{y^2}{x}+\frac{y^3}{x^2} \\
\hline
* \quad -\frac{y^3}{x^2} \\
\quad -\frac{y^3}{x^2}-\frac{y^4}{x^3} \\
\hline
* \quad +\frac{y^4}{x^3}
\end{array}$$

Der vollständige Quotient wäre

$$1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}+\frac{\left(\frac{y^4}{x^3}\right)}{x+y}$$

Es sey z. B. $x = 10$, $y = 1$, so wird

$$\frac{x}{x+y}=\frac{10}{11}=1-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}+\frac{0,001}{10+1}$$

wo es im Falle der Anwendung darauf ankommt, ob man das angehängte Ergänzungsglied unbedeutend genug findet, um bei Seite gesetzt werden zu können.

Wäre $x = y = 1$, so hätte man

$$\frac{x}{x+y}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1\ldots\ldots$$

Bleibt man bei — 1 stehen, so ist das Ergänzungsglied $+ \frac{1}{1+1}$, also

$$\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + 0 \ldots + \frac{1}{1+1};$$

Endigt man im Quotient mit + 1, so ist das Ergänzungsglied $= - \frac{1}{1+1}$, also der vollständige Quotient

$$\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + 0 \ldots + 1 - \frac{1}{1+1}$$

Man sieht, daß in beiden Fällen das Ergänzungsglied einen sehr bedeutenden Bestandtheil des vollständigen Quotienten ausmacht, der also in keinem der beiden Fälle wegbleiben kann.

VI. Zur eigenen Uebung kann man zusammengesetzte Größen mit einander multipliciren, und dann die Produkte durch einen der Faktoren dividiren; zum Quotient muß jedesmal der andere Faktor gefunden werden. Als Beispiele dienen noch

$$\frac{12ae + 24be + 20af + 40bf + 6me + 10mf}{4a + 8b + 2m}$$

und

$$\frac{a^2 - b^2 - 2ad + d^2}{a - b - d}$$

§. 9.

Wie in der Zahlenarithmetik, so werden auch hier ganze und gebrochene Glieder zuweilen mit Vortheil unter einerlei Benennung gebracht. Z. B. $x + \frac{a - 2b - 4x^2 + dx}{m + 2x - d}$.

Multiplicirt man das erste Glied x mit dem Divisor $m + 2x - d$, so erhält man $mx + 2x^2 - dx$; wir haben also statt des gegebenen Ausdrucks den folgenden

$$\frac{mx + 2x^2 - dx}{m + 2x - d} + \frac{a - 2b - 4x^2 + dx}{m + 2x - d} \text{ oder } \frac{mx + a - 2b - 2x^2}{m + 2x - d}$$

Hätte man den Ausdruck

$$d - b + \frac{a^2 - b^2 - 2ad + d^2}{a - b - d}$$

und multiplicirt man $d - b$ mit dem Divisor $a - b - d$, so erhält man statt des gegebenen Ausdrucks den

$$\frac{ad - bd - d^2 - ab + b^2 + bd}{a - b - d} + \frac{a^2 - b^2 - 2ad + d^2}{a - b - d}$$

$$= \frac{-ad - ab + a^2}{a - b - d} = a.$$

§. 10.

Mit der abgekürzten Schreibart der Potenzen ergeben sich für die Rechnung mit Potenzen noch mancherlei Folgen, die man sich wohl bekannt machen muß. Dahin gehören folgende:

Weil $aa \times aa = aaaa$

$aa \times aaa = aaaaa$ etc.

so hat man $a^2 . a^2 = a^4$; $a^2 . a^3 = a^5$; ebenso $a . a^5 = a^6$ etc. und allgemein, wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen,

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Ebenso

$$\frac{aa}{a} = a;\ \frac{aaa}{aa} = a;\ \frac{aaaa}{aa} = aa;\ \frac{aaaaa}{aa} = aaa$$

oder

$$\frac{a^2}{a} = a;\ \frac{a^3}{a^2} = a;\ \frac{a^4}{a^2} = a^2;\ \frac{a^5}{a^2} = a^3$$

und allgemein, wenn m und n ganze bejahte Zahlen sind, und $m > n$ ist,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Auch ist

$$(abc\ldots)^3 = abc\ldots \times abc \times abc = aaa\ bbb\ ccc\ldots$$
$$= a^3 b^3 c^3\ldots$$

und allgemein

$$(abc\ldots)^n = a^n.\ b^n.\ c^n\ldots$$

Ebenso

$$(a^2)^3 = aa.\ aa.\ aa = a^{3\cdot 2} = a^6$$

und allgemein

$$(a^m)^n = a^m.\ a^m.\ a^m\ldots = a^{mn}$$

§. 10.

Ausdrücke von der Form a^{-m} z. B. a^{-s}, a^{-2} u. s. w. wären in Bezug auf den festgesetzten Begriff von Potenzen ohne Sinn. Inzwischen kann man sie als arithmetische Bezeichnungen gebrochener Ausdrücke gelten lassen, wenn wir sie ebenso wie Potenzen behandlen und ihre eigentliche Bedeutung oder die ihrer Bedeutung eigentlich entsprechende Bezeichnung am Ende einer Rechnung substituiren. Die eigentliche Bedeutung ergiebt sich aus folgender Vergleichung

1.) $a^{-m} \cdot a^{m+n} = a^{m+n-m} = a^{n}$

2.) $\frac{1}{a^m} \cdot a^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{a^m} = a^{n}$

folglich

$$a^{-m} \cdot a^{m+n} = \frac{1}{a^m} \cdot a^{m+n}$$

und daher

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Es ist also auch $a^m \cdot a^{-m}$ oder a^{m-m} also a^0 einerlei mit $a^m \cdot \frac{1}{a^m}$ oder mit $\frac{a^m}{a^m}$, d. i. a^0 einerlei mit der Zahl 1, was auch statt a gesetzt werden mag.

§. 11.

a ist, wie oben gesagt worden, die nte Wurzel aus b, wenn $a^n = b$ ist. Hat man also $a^n = b$, so hat man auch $a = \sqrt[n]{b}$. Hat man $a^n = b^m$, so ist auch $a = \sqrt[n]{b^m}$.

Jede Quadratwurzel aus einer Zahl kann sowohl bejaht als verneint genommen werden. Es ist $\sqrt{4}$ 1.) $= +2$, 2.) $= -2$; denn $(-2) \times (-2)$ ist ebensowohl wie

$2 \cdot 2 = 4$. Statt der Quadratwurzel aus a schreibt man daher auch sehr häufig $\pm \sqrt{a}$, und so auch $a \pm \sqrt{b}$ statt $a + \sqrt{b}$. Aus gleichem Grunde ist auch die 4te 6te und jede Wurzel von einem geraden Exponenten sowohl bejaht als verneint z. B. $\sqrt[4]{16} = 2$ und $= -2$; $\sqrt[4]{81} = 3$ und $= -3$; denn es ist auch $(-2)^4 = 16$, und $(-3)^4 = 81$.

§. 12.

Bisher war immer die Voraussetzung, daß die Exponenten der Potenzen ganze Zahlen seyen, weil nach dem Begriff von Potenzen z. B. $4^{\frac{2}{3}}$ ein sinnloser Ausdruck wäre. Inzwischen könnte man einen solchen Ausdruck als arithmetische Bezeichnung gelten lassen, wenn man seine wahre Bedeutung in jedem Falle durch eine ihr entsprechende Bezeichnung auszudrucken vermag. Diese wahre Bedeutung eines gebrochenen Exponenten ergiebt sich aber sogleich aus folgender Vergleichung. Es ist

$$1.) \quad \left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n = b^{\frac{m\,n}{n}} = b^m$$

$$2.) \quad \left(\sqrt[n]{b^m}\right)^n = b^m$$

folglich $\left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{b^m}\right)^n$ oder $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

Man kann also Berechnungen mit Potenzen, die Exponenten mögen gebrochene oder ganze, bejahte oder verneinte Zahlen seyn, allemal so behandlen, als wären die Exponenten ganze bejahte Zahlen, wenn nur am Ende der Rechnung bemerkt wird, daß $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, und $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ist.

Hat man einen allgemeinen Ausdruck für $(a + b)m$ für die Voraussetzung, daß m eine bejahte ganze Zahl sey,

so muß derselbe Ausdruck auch noch gültig bleiben, wenn m eine gebrochene bejahte oder verneinte Zahl ist, wenn man in dem Ausdruck am Ende nur die wahre Bedeutung der Potenzen mit bejahten oder verneinten ganzen oder gebrochenen Exponenten gehörig ausdruckt. Hat dieser Satz für Potenz seine Richtigkeit für Potenzen von einfachen Größen (wie a^m), so muß er auch nothwendig für Potenzen von zweitheiligen Größen (wie $(a + b)^m$) gelten, weil die dabei vorkommenden Potenzen von a und von b ihre völlige Gültigkeit haben, und der allgemeine Ausdruck keine wirkliche Rechnungsoperationen vornimmt, sondern nur die Rechnungsoperationen angiebt, welche zur Bestimmung der einzelnen Glieder vorgenommen werden sollen.

§. 13.

Auch ist $\sqrt[n]{a^m}$ einerlei mit $(\sqrt[n]{a})^m$; denn es ist $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, und $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$.

§. 14.

Weil die nte Wurzel aus a diejenige Größe ist, deren nte Potenz $= a$ ist, so ist $(\sqrt[n]{a})^n = a$, ebenso $(\sqrt[n]{-a})^n = -a$, was auch n für eine Zahl seyn mag. Wäre n eine gerade Zahl, so wäre $\sqrt[n]{-a}$ eine unmögliche Größe, weil es keine Zahl giebt, von der eine Potenz mit einem geraden Exponenten eine verneinte Zahl werden könnte. Dennoch ist auch in diesem Falle $(\sqrt[n]{-a})^n = -a$ eine mögliche Größe, weil dieser Ausdruck nicht so betrachtet werden darf, als fordere er ein successives Verfahren, wonach zuerst $\sqrt[n]{-a}$ gesucht, und dann diese Wurzel wieder zur nten Po-

tenz erhoben werden müßte, sondern es giebt der Ausdruck $(\sqrt[n]{} - a)^n$ zu erkennen, daß die durch das Zeichen $(\sqrt[n]{})$ angedeurete Veränderung der Größe — a nicht statt haben, also die Größe — a in einem unveränderten Zustande bleiben soll.

§. 15.

$(\sqrt[n]{} a). \sqrt[n]{} b$ ist $\sqrt[n]{} ab$. Denn es ist $\sqrt[n]{} a). \sqrt[n]{} b = a^{\frac{1}{n}}. b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{} ab$. So auch $(\sqrt[n]{} - a). (\sqrt[n]{} - b) = \sqrt[n]{}(- a). (- b) = \sqrt[n]{} ab$. Ist n eine gerade Zahl, so sind $\sqrt[n]{} - a$ und $\sqrt[n]{} - b$ unmögliche Größen; man muß sich aber hüten, die Entstehung des möglichen Produkts nicht dem Umstande zuzuschreiben, daß eine unmögliche Größe unmöglichmal genommen werden solle, welches offenbar keinen Sinn hätte. Die Entstehung der Möglichkeit liegt in der arithmetischen Bezeichnung, welche die einzelnen Faktoren unmöglich macht, hier in der Zusammenstellung zweier Größen mit verneinten Zeichen, die in dieser Zusammenstellung sich gegenseitig wieder in bejahte Größen verwandlen, so daß $(\sqrt[n]{} - a). (\sqrt[n]{} - b)$ ganz einerlei ist mit $(\sqrt[n]{} a). (\sqrt[n]{} b)$, also unmögliche Faktoren in mögliche verwandelt werden, woraus dann nothwendig ein mögliches Produkt entstehen muß. So können wir auch jeden Ausdruck wie $\sqrt{} ab$ in zwei unmögliche Faktoren zerlegen; denn es ist $\sqrt{} ab = \sqrt{} (- a). (- b) = (\sqrt{} - a). (\sqrt{} - b)$; so auch $\sqrt{} a^2 = \sqrt{} (- a). (- a) = (\sqrt{} - a). (\sqrt{} - a)$, welches aber in dieser Zusammenstellung mit $(\sqrt{} a). (\sqrt{} b)$ und $(\sqrt{} a). (\sqrt{} a)$ ganz einerlei ist, wie $- (- a)$ und $+ a$.

§. 15.

Auf gleiche Weise ist auch $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; denn $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$ $= \frac{a}{b}$; aber auch $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$; also $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n =$ $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n$ und daher auch $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

§. 16.

Aus dem bisherigen ergeben sich mancherlei Verwandlungen arithmetischer Ausdrücke aus einer Form in die andere, ohne daß dadurch die Quantität des Ausdrucks verändert wird. Z. B. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$; $(\sqrt{3})$. $(\sqrt{12}) = \sqrt{3}.12 = 6$; $(\sqrt{6}).(\sqrt{8}) = \sqrt{48} = \sqrt{16}.3 = (\sqrt{16}).(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$ u. s. w. wodurch viele Berechnungen sehr erleichtert werden. Eigentlich beruht die ganze Analysis auf dergleichen Formänderungen.

Vorzüglich ist jene Formänderung von Verhältnissen oder Brüchen zu bemerken, welche auf den Satz gegründet ist, daß die Quantität eines Bruchs ungeändert bleibt, wenn Zähler und Nenner mit einerlei Ausdruck multiplicirt werden. Bezeichnen wir einen solchen Ausdruck mit N, so ist allemal

$$\frac{N}{N} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y}$$

was auch N für eine Größe und von welcher Form sie immer seyn mag. Denn da $\frac{N}{N}$ nothwendig $= 1$ ist, so kann

durch die Multiplikation mit $\frac{N}{N}$ die Quantität nicht abgeändert werden, so sehr auch die Form von $\frac{X}{Y}$ dadurch verändert werden mag. Es sey z. B. $Z = \frac{a.(x^2 - y^2)}{b(x - y)}$;

Soll dieser Werth von Z für jeden Werth von y seine Richtigkeit behalten, so muß er auch noch gelten, wenn $y = x$ wird. Dann erhält man aber

$$Z = \frac{a.(x^2 - x^2)}{b.(x - x)}$$

Diese Bestimmung wird den Unkundigen in Verlegenheit setzen. Es ergiebt sich aber ein bestimmter Werth, wenn man den Zähler so umformt, daß er, wie der Nenner, den Faktor $x - x$ enthält. Nun weiß man (§. 6. V), daß $x^2 - x^2 = (x + x).(x - x)$ ist, also

$$Z = \frac{a.(x + x).(x - x)}{b.(x - x)} = \frac{a.(x + x).N}{b.N}$$

$$= \frac{2ax}{b}.$$

Auf solchen Zerlegungen verschwindender Ausdrücke, wodurch in den Zähler und Nenner eines Bruchs verschwindende Faktoren von einerlei Form gebracht werden, die dann einander aufheben, beruht die ganze Differentialrechnung (s. Einleitung am Ende.)

Zweites Kapitel.

Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel.

§. 17.

Unsere Zahlen lassen sich sehr leicht in so viele Theile zerlegen, als sie Ziefern enthalten. Z. B.

$16 = 10 + 6$; $236 = 200 + 30 + 6$;

$5314 = 5000 + 300 + 10 + 4$; u. s. f.

Die einzelnen Zifern selbst, mit richtiger Bezeichnung ihrer Stelle (diese geschieht durch die angehängten Nulle) drukken die einzelnen Theile aus. Man kann sie auch in allen Fällen zweitheilig ausdrucken, sobald sie aus mehr als einer Ziefer bestehen. Z. B.

$16 = 10 + 6$; $236 = 200 + 36 = 230 + 6$;

$5314 = 5000 + 314 = 5300 + 14 = 5310 + 4$.

Wissen wir daher, wie das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel aus den beiden Theilen der Wurzel entsteht, so können wir hieraus umgekehrt die Regel finden, wie aus einer Zahl die Quadratwurzel gezogen werden kann.

Die gegebene Zahl sey A, so können wir $\sqrt{A}$ allemal als eine aus 2 Theilen bestehende Zahl betrachten, die wir durch $a + b$ ausdrucken können, so daß $(a + b)^2 = A$ wird, also (§. 6. IV)

$$a^2 + 2ab + b^2 = A$$

Ist z. B. $A = 16^2 = 256$, so hat man

$$256 = (10 + 6)^2$$

wo 10 statt a, und 6 statt b steht, also

$$256 = 10^2 + 2 . 10 . 6 + 6^2$$
$$= 100 + 120 + 36 = 256.$$

Das Quadrat einer jeden zweitheiligen Wurzel a + b besteht also aus 3 Gliedern

1) dem Quadrate des 1ten Theils der Wurzel (a^2).
2) dem Produkt aus dem doppelten ersten Theil der Wurzel ($2a$) in den 2ten (b).
3) dem Quadrate des 2ten Theils (b^2).

§. 18.

Es giebt nur wenige ganze Zahlen, deren Quadratwurzel vollständig gleichfalls durch eine ganze Zahl ausgedruckt werden könnte. Z. B. $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{1000000} = 1000$; aber $\sqrt{8} = 2,***...$; $\sqrt{15} = 3,***...$; $\sqrt{917} = 30,***...$ wo die Sternchen angehängte Stellen eines noch hinzukommenden Decimalbruchs bezeichnen. Anfänglich begnügen wir uns damit, die Quadratwurzel aus einer Zahl nur soweit zu suchen, als sie sich in einer ganzen Zahl ausdrucken läßt, und setzen also den noch hinzukommenden Decimalbruch ganz bei Seite.

§. 19.

Aus der Anzahl von Zifern, aus welchen eine ganze Zahl besteht, läßt sich sogleich auch die Anzahl von Zifern erkennen, aus welchen die Wurzel besteht. Denn $\sqrt{100} = 10$, also die Wurzel aller Zahlen von 1 bis 99 nothwendig kleiner als 10 (oder in Zeichen < 10), folglich höchstens $= 9$ (mit einem angehängten Bruch, welcher aber hier noch bei Seite gesetzt wird). Ferner $\sqrt{10000} = 100$, also die Wurzeln aller Zahlen von 100 bis 9999 zwar > 9 (d. h. größer als 9) aber < 100, daher höchstens $= 99$. Ebenso

$\sqrt{1000000} = 1000$, also die Wurzeln aller Zahlen von 10000 bis 999999 zwar > 99 aber < 1000, daher höchstens $= 999$. u. s. f. Also

Die Wurzeln aller ein- und zweiziefrichten Zahlen sind einziefricht.
— —— aller drei- und vierziefrichten Zahlen sind zweiziefricht.
— —— aller fünf- und sechsziefrichten Zahlen sind dreiziefricht, u. s. f.

Die $\sqrt{4}$ ist 2; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{400} = 20$; $\sqrt{4900} = 70$; $\sqrt{40000} = 200$; $\sqrt{490000} = 700$ u. s. f. Durch die erste oder die zwei ersten Ziefern einer Zahl wird allemal die erste Ziefer der Wurzel bestimmt, und diese bleibt ungeändert, was auch für Zahlen zur Rechten folgen mögen. Z. B. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{499} = 2^{*}$, *** wo 2^{*} nothwendig < 30 bleibt, weil erst $\sqrt{900} = 30$ wäre. Ebenso $\sqrt{49} = 7$, und es bleibt noch $\sqrt{4999} = 7^{*}$, ***, weil erst $\sqrt{6400} = 80$ würde. Schneidet man von der Rechten gegen die Linke von einer vorgegebenen Zahl die Zahlen paarweis ab, wo zuletzt eine oder zwei Ziefern übrig bleiben, so erhält man für die Wurzel so viele Ziefern als man Klassen durch diese Abtheilung erhalten hat. Z. B. $\sqrt{256374}$ ist $\sqrt{(250000 + 6300 + 74)}$, wo die Wurzel allemal $= 5^{**}$, *** wird; ebenso $\sqrt{96247} = \sqrt{(90000 + 6200 + 47)} = 3^{**}$, ***. Hier wäre $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{962} = 3^{*}$; $\sqrt{96247} = 3^{**}$ in einer ganzen Zahl.

§. 20.

Beispiele zur Ausziehung der Quadratwurzel mit Erklärung des Verfahrens.

I. $\sqrt{256}$ zu ziehen. Die Wurzel ist $a + b$.

Rechnung

Wurzel.

$a^2 + 2ab + b^2 = 2|56$ (1 6

abgezogen $a^2 = 100$ ⋮ ⋮

Rest . . . $2ab + b^2 = 156$ $a + b$

Divisor $2a = 20$ wo also a nicht = 1 sondern = 10 ist.

Produkte $\left\{\begin{array}{rcl} 2ab & = & 120 \\ b^2 & = & 36 \end{array}\right\}$ Summe 156

Die Summe von obigem Rest abgezogen (von 156) $= 0$

also $\sqrt{256}$ vollständig $= 10 + 6 = 16$.

Aus 200 oder 2 hundertern ist die Wurzel offenbar nur 1 Zehener, hiermit erhält man den 1ten Theil der Wurzel (a). Es ist unnöthig 10 statt 1 zu schreiben, weil die 1 durch die nachfolgende Ziefer zu einem Zehener wird. Das Quadrat von 10 (oder 100) von der ganzen vorgegebenen Zahl 256 abgezogen, läßt $a^2 + 2ab + b^2 - a^2$ oder $2ab + b^2 = 156$.

Dieser Rest dient uns nun allemal, den folgenden Theil b zu finden; es muß nämlich b so genommen werden, daß $2ab + b^2 = 156$ oder die nächstniedrigere ganze Zahl wird, welches durch einige Proben leicht bewerkstelligt wird.

Sollte blos $2ab = 156$ seyn, so hätte man nothwendig $b = \frac{156}{2a}$, weil nun $2ab + b^2$ gewöhnlich so wenig von 2ab verschieden ist, daß die so bestimmte Zahl b beibehalten werden kann oder allenfalls (wie nachher die Herstellung der beiden Produkte sogleich ausweißt) nur um 1 vermindert werden darf, so ist die Probe der Division mit 2a der kürzeste Weg, welchen man hier einschlagen kann, um b zu finden. Die Division des Restes 156 durch 2. a (hier durch 20) könnte zuerst veranlassen, 7 statt 6 für b in die

Wurzel zu setzen; dann fände man aber $2a \cdot b + b^2 = 140 + 49$ also zu groß. So wird man also geleitet, 6 für b zu setzen; womit sich dann $\sqrt{256} = 10 + 6 = 16$ ergiebt, weil am Ende o zum Rest bleibt.

Der Beweis der Richtigkeit ist sehr leicht. Soll nämlich 16 (oder $10 + 6$) die vollständige Wurzel seyn, so muß 16^2 oder $(10 + 6)^2 = 256$ werden, oder $10^2 + 2 \cdot 10 \times 6 + 6^2 = 256$. Wenn man also zuerst 10^2 oder 100 von 256, und von dem Rest noch $20 \cdot 6 + 6^2$ oder 156 abzieht, so müßte o übrig bleiben. Da wir nun diese Subtraktionen vorgenommen und zuletzt o zum Rest erhalten haben, so ist augenscheinlich $(10 + 6)^2$ oder $16^2 = 256$, also $16 = \sqrt{256}$.

Man sieht, daß es nicht nöthig ist das Quadrat von 10 nieder zu schreiben und von 256 abzuziehen, weil man dasselbe erhält, wenn man nur das Quadrat von 1 ($= 1$) unter die obere Zahl 2 setzt, dann von 2 abzieht, und neben den Rest 1 die folgende Klasse 56 herabläßt. Auch kann man die beiden Produkte $2ab + b^2$ durch eine einzige Multiplikation machen, wenn man im Werthe von 2a die zur Rechten stehende Null wegläßt und an ihre Stelle die gefundene Zahl b setzt, um auf solche Weise $2a + b$ durch eine einzige Zahl auszudrucken, die dann mit b multiplicirt mit einmal $2ab + b^2$ giebt. Hiernach erhält man mit einiger Abkürzung folgende

Rechnung

		Wurzel.
$a^2 + 2ab + b^2 = 2\|56$	(	1 6
$a^2 = 1$ ⋮		⋮ ⋮
Rest $2ab + b^2 = 156$		$a + b$
$2a + b = 26$		
$2ab + b^2 = 156$		
Von obigen 256 abgez. $= 0$		

(Die Divis. geschieht nur durch 2a also hier durch 2)

II. $\sqrt{}$ 25600. zu ziehen:

Wurzel.

$a^2 + 2ab + b^2 = 2|56|00$ (1 6 0

$a^2 = 1\,00\,00$ ⋮ ⋮ ⋮

a + b

1ter Rest $2ab + b^2 = 15600$ ⋮

a + b

Divisor $2a = 200$ Hier wird $a = 100$

$2a + b = 260$ und $b = 60$

$2ab + b^2 = 15600$ Dieses wird abgezog. vom 1ten Rest.

2ter Rest $2ab + b^2 = 0$ Hier ist $a = 160$, b wird

Divisor $2a = 320$ aufs Neue gesucht.

giebt jetziges $b = 0$

oder auch

Wurzel

$a^2 + 2ab + b^2 = 2|56|00$ (1 6 0

$a^2 = 1$ ⋮ ⋮ ⋮

a + b ⋮

1ter Rest $2ab + b^2 = 156$ a + b ⋮

$2a + b = 26$ Die Divis. geschieht durch 2

$2ab + b^2 = 156$ ⋮

2ter Rest $2ab + b^2 = 000$

Aufs Neue dividirt

mit $2a$ . . . . = 320

giebt jetziges $b = 0$

$2ab + b^2 = 0$ wird vom 2ten Rest abgezogen.

3ter Rest . . . . . = 0

also vollständig $\sqrt{}$ 25900 = 160.

III. $\sqrt{}$ 556516 zu ziehen:

			Wurzel
$a^2 + 2ab + b^2$	=	55|65|16	(7 4 6
	a^2	= 49 00 00	
1ter Rest $2ab + b^2$	=	6516	$\underbrace{a + b}_{a}$ b
Divisor $2a$	=	1400	Hier ist a = 700
$2a + b$	=	1440	b = 40
$2ab + b^2$	=	57600	wird abgez. vom 1ten Rest.
2ter Rest $2ab + b^2$	=	8916	Hier bezieht sich b auf die folgende 3te Ziefer der Wurzel; a ist jetzt 740.
Divisor $2a$	=	1480	
$2a + b$	=	1486	
$2ab + b^2$	=	8916	wird abgez. vom 2ten Rest.
3ter Rest	=	0	

also vollständig $\sqrt{}$ 556516 = 746.

Kürzer:

			Wurzel
$a^2 + 2ab + b^2$	=	55|65|16	(7 4 6
	a^2	= 49	$\underbrace{a + b}$
1ter Rest $2ab + b^2$	=	665	a + b
$2a + b$	=	144	Hier ist a = 70
$2ab + b^2$	=	576	b = 4
2ter Rest $2ab + b^2$	=	8916	Hier ist a = 740, b der folgende Theil der Wurzel, welcher durch die Division mit 2a gefunden wird.
$2aj + b$	=	1486	
$2ab + b^2$	=	8916	
3ter Rest	=	0	

also $\sqrt{}$ 556516 = 746.

Indem man zuerst nur die Wurzel aus 55 zieht, (hier die 7), weiß man schon, daß noch 2 Ziefern nach der 7 folgen müssen, daß also die 7 sich nicht auf Einer sondern auf Hunderter bezieht, daher bei der ersteren Berechnung $a^2 = 490000$ gesetzt ist. Aber dieses Nachschleppen der

Nullen ist ganz überflüßig, wenn man die einzelnen Klassen, wie hier in der 2ten Rechnung geschehen ist, neben jeden Rest nach und nach herabläßt.

Zuerst erhält man $\sqrt{55} = 7$, weil aber 7^2 nur $= 49$ ist, so ist die Wurzel eigentlich $= 7, * * * \ldots$

Nunmehr kommt in Betrachtung, daß noch eine 2te Klasse 65 neben 55 steht, und man handelt jetzt so, als ob $\sqrt{5565}$ verlangt würde. Jene 7 verwandelt sich jetzt in 70, und es ist für die $\sqrt{5565}$ die Zahl 70 der 1te Theil der Wurzel (a), wozu noch der 2te b gesucht werden muß, es ist nämlich $\sqrt{5565} = 70 + b$, und man fand $b = 4$, also $\sqrt{5565} = 74$.

Indessen ist $74^2 < 5565$, nämlich $= 5476$, so daß noch 89. übrig bleiben.

Weil aber nach 5565 noch eine Klasse folgt (16), so bezeichnen gedachte 4 Ziefern eigentlich die Zahl 556500, und die Wurzel 74 verwandelt sich in 740; das Quadrat von 740 ist aber 547600, und dieses von 556500 abgezogen, läßt 8900 zum Rest. Da man aber statt 556500 eigentlich 556516 hat, so bleibt zum Rest noch 8916, und die vollständige Wurzel ist $740 + b$, wo b als der folgende Theil wieder gesucht werden muß. Setzt man $740 = a$, so ist $556516 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Zieht man aber 740^2 ($= a^2$) von 556516 ab (welches in der Rechnung durch successive Subtraktionen geschehen ist), so bleibt jener Rest 8916 übrig, der also jetzt wieder $= 2ab + b^2$ seyn muß, woraus man aufs Neue den folgenden Theil b ($= 6$) findet, so daß nun vollständig $\sqrt{536516} = 740 + 6$ oder 746 gefunden ist.

IV. $\sqrt{5348769}$ zu finden:

5|34|87|69 (2312

4

134

43

129

587

461

12669

4622

9244

3425

Probe

2312
2312
4624
2312
6936
4624
5355344
Add. 3425
= 5348769

V. $\sqrt{5106431}$ zu finden:

5|10|64|31 (2259

4

110

42

84

2664

445

2225

43931

4509

40481

3350

Probe

2259
2259
20331
11295
4518
4518
5103081
Add. 3350
= 5106431

§. 21.

Hängt man an eine Zahl ein Paar Nullen an, so wird dadurch ihre Wurzel 10 fach vergrössert; durch 4 Nullen 100 fach u. s. f. z. B. $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{900} = 30$; $\sqrt{90000} = 300$ u. s. f. Soll man also z. B. $\sqrt{5}$ suchen, und sucht sie statt dessen aus 5000000, so findet man sie 1000 mal

zu groß; wird daher die so berechnete Wurzel mit 1000 dividirt, oder werden 3 Decimalstellen von ihr abgeschnitten, so erhält man die Wurzel noch mit 3 Decimalstellen. Dieses ist die Methode, eine Wurzel so genau zu finden als man verlangt.

I. $\sqrt{17}$ zu finden, mit 2 Decimalstellen

```
17,0000 (4,24
16
---
 100
  82
 164
---
 3600
  844
 3376
---
  224
```

II. $\sqrt{3}$ in 5 Decimalstellen zu finden

```
3,0000000000 (1,73204
1
---
200
 27
189
---
1100
 343
1029
---
 7100
 3462
 6924
---
 17600
(*) 34640
 00000
---
 1760000
  346404
 1485616
---
  274384
```

Es ist genug, an jedem Rest 2 Nullen anzuhängen, und so die Rechnung fortzusetzen.

Kommt man, wie hier bei (*) auf einen Divisor, der größer als der Dividend ist, so ist die Nullenrechnung, wie sie hier geführt ist, gar nicht nöthig; man bemerkt nur in der Wurzel die Null, hängt dann gleich noch ein Paar Nullen am Rest an und setzt dann die Rechnung ordentlich fort. Es könnten auch mehrere Nullen nach einander in der Wurzel vorkommen.

III. $\sqrt{}$ 4,013265 zu finden, in 5 Decimalstellen.

4,01326500 (2,00331

4

13265

4003

12009

125600

40063

120189

541100

400661

140439

Die Quadratwurzel aus einem Bruch, in der gemeinen Form, ergiebt sich durch Verwandlung des gemeinen Bruchs in einen Decimalbruch. Z. B. $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{}$ 0,428571 . . . . Es versteht sich, daß man allemal eine gerade Anzahl von Decinalstellen nehmen muß.

0,428571 (0,654

36

685

125

625

6071

1304

5216

855

Sollte man $\sqrt{5\frac{3}{7}}$ in 4 Decimalstellen angeben, so hätte man $\sqrt{5\frac{3}{7}} = \sqrt{}$ 5,42857143

5,42857143 (2,3299

4

142

43

129

385

462

924

46171

4649

41841

433043

46589

419301

13742

Man darf nur erwägen, daß $\sqrt{5,42857143} = \frac{\sqrt{542857143}}{\sqrt{100000000}}$ ist, also $= \frac{\sqrt{542857143}}{10000}$ so daß man die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl zieht, und dann 4 Decimalstellen abschneidet.

Sollte z. B. $\sqrt{3,174}$ in 3 Decimalstellen angegeben werden, so müßte man $\sqrt{3,174000}$ setzen, und hieraus die Wurzel suchen.

§. 22.

Mit der Ausziehung der Kubikwurzel hat es ganz dieselbe Bewandniß, nur daß die Rechnung weitläuftiger wird. Man hat nämlich

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\times (a + b)$$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2$$

$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Der Kubus einer 2 theiligen Wurzel $a + b$ enthält also allemal 4 Glieder:

das 1te ist der Kubus vom 1ten Theil der Wurzel

das 2te ist das Produkt aus dem 3 fachen Quadrat des 1ten Theils der Wurzel in den 2ten.

— 3te — das Produkt aus dem 3 fachen 1ten Theil der Wurzel in das Quadrat des 2ten.

— 4te — der Kubus des 2ten Theils der Wurzel.

Hat man also einmal den Kubus des 1ten Theils der Wurzel von der vorgegebenen Zahl (die man sich allemal durch $a^3 + (3a^2b + 3ab^2 + b^3)$ ausgedruckt denkt) abgezogen, so bleibt jedesmal $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (wie bei Ausziehung der Quadratwurzel $2ab + b^2$) zum Rest, und eine oder ein Paar Proben mit der Division eines solchen Restes durch $3a^2$ geben sehr leicht den Werth von b, nach welchem jene 3 Glieder gebildet und vom vorhergehenden Rest abgezogen einen neuen Rest und dann durch die Division mit $3a^2$ jedesmal wieder einen neuen Werth von b, ganz so wie bei der Quadratwurzel geben. Zur Erläuterung dienen nachstehende Rechnungen *)

I. $\sqrt[3]{8563}$ zu finden:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 8\|563$	Wurzel.	
$a^3 = \underline{8}$	2	0
Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^2 = 563$	$a + b$	Probe
Divisor $3a^2 = \underline{1200}$		$20^3 = 8000$
		Add. $\underline{563}$
		$= 8563$

Hier ist weitere Ausführung der Rechnung unnöthig, weil alle 3 Produkte $= 0$ werden; ihre Summe von 563 abgezogen läßt also 563 zum Rest.

---

*) Aus ähnlichen Gründen, wie bei den Quadratwurzeln 2 Ziefern zu einer Klasse genommen wurden, müssen hier jedesmal 3 genommen werden. Dem es ist $\sqrt[3]{999} < 10$; $\sqrt[3]{999999} < 100$ u. s. f.

II. $\sqrt[3]{2984}$.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 2|984$ (Wurzel. 1 5

$a^3 = 1$ ⋮ ⋮ $a + b$

Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1\ 984$

Divisor $3a^2 = 300$

$3a^2b = 1\ 500$
$3ab^2 = 75$
$b^3 = 125$
Summe 1700

Jetzt ist $(a + b)^3$ oder $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ also in Zahlen $(10 + 5)^3$

Von 1984 abgezogen giebt 284

vollständig gemacht und von 2984 abgezogen worden, nämlich zuerst 1000 dann 1700, im Ganzen 2700, welches von 2984 abgezogen noch 284 zum Rest giebt.

III. $\sqrt[3]{3856247}$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3|856|247$ (Wurzel. 1 5

$a^3 = 1$ ⋮ ⋮ $a + b$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 2\ 856$

Divisor $3a^2 = 300$

$3a^2b = 1\ 500$
$3ab^2 = 150$
$b^3 = 125$
Summe 2375

Jetzt ist $(10+5)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 \cdot 5^2 + 5^3$ gemacht und die

Von 2856 abgezogen = 481

Summe 1000 + 2375 oder 3375 von 3856 abgezogen worden. Der Rest ist 481. Also ist $\sqrt[3]{3856} = 15$, und $\sqrt[3]{3856000} = 150$.

Man hat also jetzt 150 wieder als den 1ten Theil der Wurzel aus der vorgegebenen Zahl zu betrachten, also jetzt $150 = a$ zu setzen, und wieder den folgen-

den Theil b durch die Division mit $3a^2$ oder 3.150^2 zu suchen. Der Kubus 150^3 oder $15^3.1000$ ist 2375000, dieser von 3856247 abgezogen giebt den Rest 481 mit der herabzulassenden 3ten Klasse oder 481247, der also jetzt (150 unter a verstanden) wieder $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ seyn muß. Hierauf gründet sich die Fortsetzung der Rechnung, die ich jetzt mit der angefangenen verbinde.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3|856|247$ (Wurzel. 1 5 6

$a^3 = 1$ — a + b

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 2856$ — a + b

Divisor $3a^2 = 300$

$3a^2b = 1500$ } Summe

$3ab^2 = 750$ } 2375

$b^3 = 125$ }

Von 2856 abgezogen $= 481\,247$

Divisor $3a^2 = 67\,500$

$3a^2b = 405\,000$ }

$3ab^2 = 16\,200$ } Summe 421416

$b^3 = 216$ }

Von 266247 abgezogen $= 59\,831$

Probe.

$1563^3 = 3\,796\,416$

Add. $59\,831$

$3\,856\,247$

§. 23.

Will man nicht blos die ganze Zahl der Wurzel bestimmen, sondern noch eine beliebige Anzahl von Decimalstellen hinzufinden, so verfährt man wie bei Ausziehung der

Quadratwurzel, nur daß man soviele Klassen von 3 Nullen anhängt, als dort mit Klassen von 2 Nullen geschahe. Um z. B. $\sqrt[3]{7}$ in 3 Decimalstellen zu finden, sucht man $\sqrt[3]{7000000000}$ und schneidet von der gefundenen Wurzel 3 Decimalstellen ab.

Verlangt man die Kubikwurzel aus einem gemeinen Bruch bis zu n Decimalstellen, so verwandelt man ihn in einen Decimalbruch mit 3n Decimalstellen, und zieht aus solchem die Kubikwurzel.

Logarithmische Berechnungen überheben uns aller dieser Arbeiten, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden.

Drittes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 24.

Reihen von Zahlen, die in steeter geometrischer Proportion fortschreiten, heißen geometrische; schreiten die Zahlen in steeter arithmetischer Proportion fort, so heißen sie arithmetische Reihen.

Beispiele von geometrischen Reihen:

1	2	4	8	16	32	64 . . . . .
3	6	12	24	48	96	192 . . . . .
5	25	125	625	3125	15625	. . . . .
1000	500	250	125	62,5	. . . . .	

Beispiele von arithmetischen Reihen:

1	2	3	4	5	. . . . .
10	20	30	40	50	. . . . .
5	10	15	20	25	. . . . .
100	94	88	82	76	. . . . .

Reihen, wie die 3 ersten heißen zunehmende oder steigende Reihen; solch. wie die 4te abnehmende oder fallende Reihen.

Die allgemeine Darstellung der geometrischen Reihen ist

$$a \quad ea \quad e^2a \quad e^3a \quad \ldots \quad e^{n-2}a \quad e^{n-1}a$$

die der arithmetischen

$$b \quad b+d \quad b+2d \quad b+3d \quad \ldots \quad b+(n-2)d \quad b+(n-1)d$$

wo n die Zahl bezeichnet, welche andeutet, vom wievielten Gliede der Reihe die Rede ist.

In der 1ten geom. Reihe ist a = 1, e = 2, n = 7
— — 2ten — — — a = 3, e = 2, n = 7
— — 3ten — — — a = 5, e = 5, n = 6
— — 4ten — — — a = 1000, e = $\frac{1}{2}$, n = 5
In der 1ten arithm. Reihe ist b = 1, d = 1, n = 5
— — 4ten — — — b = 100, d = — 6, n = 5

§. 25.

Die Verbindung einer mit 1 anfangenden geometrischen Reihe mit einer von 0 anfangenden arithmetischen gewährt uns außerordentliche Rechnungsvortheile. Die zu den Gliedern der geometrischen Reihe gehörigen Glieder der arithmetischen heißen Logarithmen der ersteren. Die Darstellung eines Logarithmensystems ist hiernach im Allgemeinen folgende:

1	e	e^2	e^3	e^4	e^5	....	e^{n-2}	e^{n-1}
0	d	2d	3d	4d	5d	...	(n—2).d	(n—1).d

Hier ist also

$0 = \log. 1$; $d = \log. e$; $2d = \log. e^2$; $(n-1).d = \log. e^{n-1}$

Was also auch n bedeuten mag, so ist allemal (n — 1). $d = \log. e^{n-1}$, wo d und e willkührliche Zahlen seyn mögen. Es ist also auch allgemein

I. $\log. e^m = m . d = m . \log. e.$

Er.	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6	e^7	e^8	e^9	e^{10}	e^{11}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33

Hier ist $2048 = 2^{11}$, $3 =$ log. 2, und log. 2048 oder log. $2^{11} = 11$. log. $2 = 11 . 3 = 33$.

§. 26.

Machen wir von Gliedern der geometrischen Reihe ein Produkt z. B. $e^2 . e^4 . e^5 = e^{11}$, und nehmen von den zugehörigen Gliedern der arithmetischen Reihe die Summe $6 + 12 + 15 = 33$, so finden wir letztere (33) unter erstrem 2048, so daß $l . e^2 + l . e^4 + l . e^5$ oder $l . 4 + l . 16 + l . 32 =$ log. $(4 . 16 . 32)$ wird. Dieses gilt ganz allgemein.

Nehmen wir Glieder der geometrischen Reihe, welche wir wollen, die wir also allgemein durch e^α, e^β, e^γ, e^δ u. s. f. ausdrucken können, so ist

$$e^\alpha . e^\beta . e^\gamma . e^\delta = e^{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

die zugehörigen Zahlen der arithmetischen Reihe oder die Logarithmen von e^α, e^β .... sind $\alpha . d$, $\beta . d$, $\gamma . d$ $\delta . d$, und ihre Summe $= (\alpha + \beta + \gamma + \delta) . d$ oder $= (\alpha + \beta + \gamma + \delta) .$ log. $e =$ log. $e^{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$ vermöge (I. vor. §.); folglich

$\alpha . d + \beta . d + \gamma . d + \delta . d$ oder $l . e^\alpha + l . e^\beta + l . e^\gamma + l . e^\delta = l . e^{\alpha + \beta + \gamma + \delta} =$ log. $e^\alpha . e^\beta . e^\gamma . e^\delta$.

Sind also A, B, C, D .... willkührlich genommene Glieder der geometrischen Reihe (statt e^α, e^β ....), so ist allgemein

II. log. A.B.C.D... = log. A + l.B + l.C + l.D....

§. 27.

Es sey $\frac{A}{B} = x$, so hat man $A = B \cdot x$ und vermöge

(II.) log. $A = l. B + l. x$, also log. $A =$ log. B

$+$ log. x, oder, weil $x = \frac{A}{B}$ ist,

III. log. $\frac{A}{B} =$ log. A $-$ log. B

§. 28.

Es sey $\sqrt[m]{A} = y$, so ist $A = y^m$ und log. $A = m$.

log. y, also $\frac{\text{log. A}}{m} =$ log. y, oder, weil $y = \sqrt[m]{A}$ ist,

IV. log. $\sqrt[m]{A} = \frac{\text{log. A}}{m}$

§. 29.

Die 4 allgemeine Ausdrücke (I — IV) behalten ihre Gültigkeit, was auch e und d in dem Logarithmensystem (§. 25.) für Zahlen seyn mögen. Unsere gemeinen Logarithmentafeln sind zuerst von Heinrich Brigg berechnet worden. Er ordnete nachstehende Reihen zusammen:

1	10	100	1000	10000 . . . .
0	1	2	3	4 . . . .

Er nahm also für die Fundamentalreihen $e = 10$ und $d = 1$. Die Zahl, deren Logarithme $= 1$ seyn soll, heißt die Basis des Systems, die also bei dem Briggischen 10 ist. Hiernach sind also, wenn die Sternchen angehängte Decimalstellen bezeichnen,

die Logarithmen ganzer Zahlen

von Zahlen zwischen 1 und 10 = 0, *****...
10 u. 100 = 1, *****...
100 u. 1000 = 2, *****...
1000 u. 10000 = 3, *****...
10000 u. 100000 = 4, *****...
u. s. f.

Die ganze Zahl des Logarithmen heißt seine Charakteristik, der angehängte Decimalbruch seine Mantisse.

Nach Bestimmung dieser beiden Fundamentalreihen blieb nun für gedachten Briga noch die große Arbeit übrig, die Logarithmen aller zwischen die Hauptglieder der angenommenen Fundamentalreihen fallenden ganzen Zahlen zu berechnen z. B. von 2 bis 9; von 11 bis 99 ꝛc. Diese Berechnungen sind keiner Schwierigkeit unterworfen; nur sind sie mühsam. Soll z. B. log. 5 gefunden werden, so sucht man zwischen 1 und 10 so lange mittlere geometrische Proportionalzahlen, bis man auf eine kommt, die nicht mehr um 0,0000001 größer oder kleiner als 5 ist; diese Zahl sey z. Dann sucht man die ebensovielte mittlere arithmetische Proportionalzahl, und diese ist nun = log. z. Man setzt nun ebendiese Zahl auch für log. 5, weil die z von der 5 nicht mehr um 0,0000001 verschieden ist. Bekanntlich ist die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen x und y $= \sqrt{xy}$, daher man hierbei sehr viele Wurzeln auszuziehen hat. Die Rechnung wäre folgende:

$\sqrt{10 . 1} = 3,1622776625 = C$
$\sqrt{10 . C} = 5,6234132540 = D$
$\sqrt{C . D} = 4,2169650366 = E$
$\sqrt{D . E} = 4,8696752538 = F$
$\sqrt{D . F} = 5,2329911489 = G$
$\sqrt{F . G} = 5,0480657187 = H$

$$\sqrt{F \cdot H} = 4{,}9580682447 = J$$
$$\sqrt{H \cdot J} = 5{,}0028646130 = K$$

u. s. f.

Ebenso hat man für die zugehörigen mittleren arithmetischen Proportionalzahlen, welche zwischen die Logarithmen von 1 und 10 fallen

$$\frac{0+1}{2} = 0{,}5 = \log. C$$

$$\frac{1+0{,}5}{2} = 0{,}75 = l. D$$

$$\frac{0{,}5+0{,}75}{2} = 0{,}625 = l. E$$

$$\frac{0{,}75+0{,}625}{2} = 0{,}6875 = l. F$$

$$\frac{0{,}75+0{,}6875}{2} = 0{,}71875 = l. G$$

$$\frac{0{,}6875+0{,}71875}{2} = 0{,}703125 = l. H$$

$$\frac{0{,}6875+0{,}703125}{2} = 0{,}6953125 = l. J$$

$$\frac{0{,}703125+0{,}6953125}{2} = 0{,}69921875 = l. K$$

u. s. f.

Durch Fortsetzung solcher Berechnungen findet man endlich

$$l. 5{,}0000000145 = 0{,}6989700049$$
$$l. 4{,}9999999691 = 0{,}6989700012$$

Demnach erhält man in 8 Decimalstellen

$$\log. 5 = 0{,}69897000$$

weil jede zwischen 0,6989700049 und 0,6989700012 liegende Zahl nothwendig mit den gedachten 8 Decimalstellen anfangen muß.

Inzwischen durfte Brigg doch nicht die Logarithmen aller Zahlen so mühsam berechnen, sondern nur die der Primzahlen, aus welchen sich dann die der zusammengesetzten durch bloße Addition ergeben. Hat man z. B. die Logarithmen von 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 . . . . berechnet, so hat man

log. 4 = 2 . log. 2;
log. 6 = log. 3 + l. 2;
log. 8 = l. 4 + l. 2;
log. 9 = 2 . l. 3;
log. 12 = l. 3 + l. 4;
log. 14 = l. 2 + l. 7;
log. 15 = l. 3 + l. 5;
log. 16 = 2 . l. 4
log. 18 = l. 2 + l. 9
log. 20 = l. 2 + l. 10,
log. 21 = l. 3 + l. 7
log. 22 = l. 2 + l. 11
log. 24 = l. 4 + l. 6
log. 25 = 2 . l. 5
log. 26 = l. 2 + l. 13
log. 27 = l. 3 + l. 9
log. 28 = l. 2 + l. 14
log. 30 = l. 3 + l. 10
log. 32 = l. 2 + l. 16
log. 33 = l. 3 + l. 11
log. 34 = l. 2 + l. 17
log. 35 = l. 5 + l. 7
log. 36 = 2 . l. 6
log. 38 = l. 2 + l. 19
log. 39 = l. 3 + l. 13
log. 40 = l. 4 + l. 10
etc. etc.

Auch die Logarithmen der Primzahlen lassen sich durch Kunstgriffe, welche Brigg noch nicht kannte, die wir aber in der Folge noch werden kennen lernen, jetzt weit leichter finden. Aber auch ohne diese Kunstgriffe lassen sich die Logarithmen von Zahlen, welche zwischen solche fallen, die höchstens um 2 von einander verschieden aber schon größer als 1000 sind, durch die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beiden angränzenden Logarithmen ausdrucken.

z. B. log. 3400 = 3,53147 89
log. 3402 = 3,53173 43
Summe = 7,0632132

Diese Summe halbirt, giebt

log. 3401 = 3,5216066

wie man ihn in den Tafeln wirklich findet.

Wären die Zahlen auch nur wenig über 1000, so fehlt man hierbei doch noch nicht um 0,000001 im Logarithmen. Es ist z. B.

l. 1000 = 3,0000000
l. 1002 = 3,0008677
Summe = 6,0008677

Diese halbirt gäbe

l. 1001 = 3,0004338
Die Tafeln geben 8,0004341
Differenz = 0,0000003

Unser Logarithme wäre also nur um 0,0000003 zu klein. Man darf in allen Fällen die 8te Decimalstelle des so berechneten Logarithmen nur noch um $\frac{1000}{N}$ vergrößern, wenn N die Zahl ist, deren Logarithmen man so berechnet hat. z. B.

l. 2000 = 3,3010300
l. 2002 = 3,3014641
Summe = 6,6024941

Diese halbirt gäbe

l. 2001. = 3,30124705

Nun ist $\frac{1000}{2001}$ = 0,50 also genauer, indem man noch

0,00000050 addirt

log. 2001 = 3,3012471

wie ihn auch die Tafeln geben. Man behält dabei immer 7 Decimalstellen bei, weil die Logarithmen in den gewöhnlichen Tafeln nur in soviel Stellen berechnet sind.

§. 30.

Aus dem vorstehenden §. ersieht man, daß die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Logarithmen von 1000 und 1002 sehr genau der Logarithme von der mittleren arithmetischen Proportionalzahl zwischen 1000 und 1002 ist, und noch genauer daß die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Logarithmen von 3400 und 3402 der Logarithmen von der mittleren arithmetischen Proportionalzahl zwischen 3400 und 3402 ist, sogar in 7 Decimalstellen. Man weiß aber, daß die zum mittleren Logarithmen gehörige Zahl nicht die mittlere arithmetische sondern die mittlere geometrische zwischen den zugehörigen Zahlen der beiden gegebenen Logarithmen seyn muß. Genau wäre also 3,5316066 nicht der Logarithme von $\frac{3400 + 3402}{2}$ oder von 3401, sondern von $\sqrt{(3400 . 3402)}$ oder von $\sqrt{(3401 - 1) . (3401 + 1)}$ d. i. von $\sqrt{(3401^2 - 1)}$, welches nothwendig eine etwas kleinere Zahl ist, als 3401. Es ist aber 3401^2 von $3401^2 - 1$ noch nicht um $\frac{1}{10000000}$ des Ganzen verschieden, also die Wurzel aus 3401^2 von der Wurzel aus $3401^2 - 1$ noch noch nicht um $\frac{1}{20000000}$ des ganzen. Hieraus ist begreiflich, daß bis zur Berechnung von 7 Decimalstellen die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 3400 und 3402 mit der mittleren arithmetischen übereinstimmt, und daß daher der mittlere Logarithme bis zu 7 Decimalstellen auch der Logarithme der mittleren arithmetischen Proportionalzahl zwischen 3400 und 3402 oder der Logarithme von 3401 seyn muß.

Um sovielmehr muß dieses für die Logarithmen von Zahlen gelten, welche zwischen Zahlen fallen, die grösser als 1000 aber nur um 1 von einander verschieden sind. Z. B.

log. 1000 = 3,0000000
log. 1001 = 3,0004341

6,0004341

Dieses halbirt gäbe 3,0002170

Dieses wäre der Logarithme von $\sqrt{1000 . 1001}$ oder von $\sqrt{(1000,5 - 0,5) . (1000,5 + 0,5)} = \sqrt{(1000,5^2 - 0,25)}$. Da $\sqrt{(1000,5^2 - 0,25)}$ nur um $\frac{1}{8000000}$ des Ganzen von $\sqrt{1000,5^2}$ oder von 1000,5 verschieden ist, so erhellet, daß 3,0002170 auch noch der Logarithmen von 1000,5 bleiben muß.

Hieraus folgt der Satz:

Wenn 2 Zahlen beide grösser als 1000 und höchstens um 1 von einander verschieden sind, und nun B eine Zahl ist, welche zwischen jene beide fällt, so ändern sich die Differenzen der Logarithmen in demselben Verhältnisse (wenigstens sicher, wenn man nicht über 7 Decimalstellen hinausgeht), in welchem sich die Zahlen selbst ändern. Ist A die kleinere ganze Zahl, also A + 1 die nächstgrößere, so hat man aus den Tafeln auch die logarithmische Differenz l. (A + 1) — l. A, so lange die Zahlen aus nicht mehr als 4 Ziefern bestehen. Denkt man sich z. B. von A bis A + 1 21 nach einander folgende Zahlen, also nach A noch 20, in einer arithmetischen Reihe, und ebenso von log. A bis log. (A + 1) 21 nach einander folgende Zahlen in einer arithmetischen Reihe, so sind letztere sehr genau die Logarithmen der ersteren. Man erhält nämlich

Zahlen	Zugehörige Logarithmen.
A	log. A
$A + \frac{1}{20}$	log. $A + \frac{1}{20}$ (log. $(A + 1) -$ log. A)
$A + \frac{2}{20}$	log. $A + \frac{2}{20}$ (log. $(A + 1) -$ log. A)
$A + \frac{3}{20}$	log. $A + \frac{3}{20}$ (l. $(A + 1) -$ l. A)
⋮	⋮
$A + \frac{20}{20} (= A + 1)$	log. $A + \frac{20}{20}$ (l. $(A + 1) -$ l. A) $(=$ l. $(A + 1))$

Also $\log. \left(A + \frac{n}{20}\right) = \log. A + \frac{n}{20} \cdot (l.(A + 1) - l. A)$

oder noch allgemeiner

V. $\log. \left(A + \frac{n}{p}\right) = \log. A + \frac{n}{p} \cdot (l.(A + 1) - l. A)$

wo für A jede Zahl, die größer als 1000 ist, und für $\frac{n}{p}$ jeder eigentliche Bruch gesetzt werden kann.

Ex. Man soll den Logarithmen von 3597,814 angeben.

Hier ist $\frac{n}{p} = 0,814$; $A = 3597$, also

log. 3597,814 = log. 3597 + 0,814. (l. 3598 — l. 3597)

Nach den Tafeln ist

log. 3598 = 3,5560612
log. 3597 = 3,5559404
Diff. = 0,0001208
× 0,814
4832
1208
9664
= 0,0000983312

Add. log. 3597 = 3,5559404....

log. 3597,814 = 3,5559502

§. 31.

Wäre der Logarithme einer Zahl gegeben, die zwischen A und A + 1 fällt, und bezeichnen wir solchen mit λ, so ist aus V

$$\lambda = \log. A + \frac{n}{p} \cdot (l. (A + 1) - l. A)$$

oder

$$\lambda - \log. A = \frac{n'}{p} \cdot (l. (A + 1) - l. A)$$

folglich

$$\frac{\lambda - \log. A}{l. (A + 1) - l. A} = \frac{n}{p}$$

Die zu λ gehörige Zahl heiße B, so ist nothwendig $B = A + \frac{n}{p}$, also

VI.
$$\begin{cases} B = A + \dfrac{\lambda - \log. A}{l. (A + 1) - l. A} \\ \text{oder auch} \\ B = A + \dfrac{\log. B - l. A}{l. (A + 1) - l. A} \end{cases}$$

Man kann V und VI auch so ausdrucken

$$(B - A) : 1 = (\log. B - \log. A) : (l. (A + 1) - l. A)$$

oder

$$(l. (A + 1) - l. A) : (l. B - l. A) = 1 : (B - A)$$

Ex. Es ist der Logarithme 3,7642883 gegeben, man soll die zugehörige Zahl finden.

Hier ist . . . . . = 3,7642883 = l. A
Der nächstniedrigere Logarithme
ist nach der Tafel . = 3,7642509 = l. A

Diff. = 0,0000374

Dabei ist $A = 5811$. Es ist ferner

$$\log. 5812 = 3,7643256 = l.(A+1)$$
$$\text{Abgezogen} \quad . \quad . \quad 3,7642509 = l.A$$
$$\text{Diff.} = 0,0000747$$

also $$B = 5811 + \frac{373}{747} = 5811,499$$

§. 32.

Aber auf Zahlen unter 1000 ist dieses Verfahren desto weniger anwendbar, je kleiner die Zahlen sind. Zu solchen Zahlen lassen sich aber die schon berechneten Tafeln gleichfalls sehr leicht anwendbar machen. Soll man z. B. die Logarithmen von 13,7; 216,8; 5,638; 19,3768 angeben, so hat man

$$\text{VII.} \begin{cases} \log. 13,7 = \log. \frac{137}{10} = l.137 - \log.10 = l.137 - 1 \\ \log. 5,638 = l. \frac{5638}{1000} = l. 5638 - 3 \\ \log. 216,8 = l. \frac{2168}{10} = l. 2168 - 1 \\ \log. 19,3768 = l. \frac{1937,68}{100} = l. 1937,68 - 2 \end{cases}$$

die sich nun alle nach (V) finden lassen.

Sollte man die Zahl suchen, welche zu einem Logarithmen gehört, welcher < 3 wäre, so müßte die Zahl selbst < 1000 seyn, daher man den Ausdruck (VI) nicht mehr mit Genauigkeit gebrauchen könnte. Dann darf man nur noch 1 oder 2 oder 3 = oder 4 überhaupt soviele Einheiten zu dem gegebenen Logarithmen addiren, daß er $= 3,$****** würde, und nun die zugehörige Zahl nach VI suchen. Hätte man n Einheiten (d. h. die ganze Zahl n) addirt, so wäre die zugehörige Zahl 10^n mal so groß, als die welche man

suchte. (Ist z. B. 1,3576248 = log. k, so ist 2 + 1,3576248 = log. 100 + log. k = log. 100 k, folglich die Zahl, welche dem Logarithmen 3,3576248 zugehört, nicht k sondern 100 . k). Dann muß man also die nach VI gefundene Zahl B wieder mit 10^n dividiren. Es ist nämlich log. 10^n = n, also n + log. k = log. 10^n . k; und die zu n + log. k gehörige Zahl = 10^n . k; und die zu n + log. k gehörige Zahl mit 10^n dividirt = k.

1. Ex. Man soll die zum Logarithmen 0,6537492 gehörige Zahl k suchen. Hier wird n = 3, und man sucht die zu 3,6537492 gehörige Zahl B nach

(VI). Hier ist . . . . . 3,6537492 = l. B
Der nächstniedrigere Logarithme
ist nach den Tafeln . . 3,6536948 = l. A

Diff. = 0,0000544

Dabei ist A = 4505.

Es ist ferner log. 4506 = 3,6537912 = l. (A + 1)
Abgezogen log. 4505 = 3,6536948 = l. A

Diff. = 0,0000964

544

$$\text{also } B = 4505 + \frac{544}{964} = 4505{,}564$$

Weil aber der Logarithme um n = 3 vergrössert worden, so ist B = 10^3 . k, folglich

$$k = \frac{4505{,}564}{1000} = 4{,}505564$$

2. Ex. Man soll die zum verneinten Logarithmen — 2,3684359 gehörige Zahl finden. Hier muß man n = 6 addiren, um den Logarithmen in 3,******* zu verwandeln; man erhält durch diese Addition

log. B = 3,6315641

Der nächstniedrige Logarithme
ist nach den Tafeln log. A = 3,6315452

Diff. = 0,0000189

Dabei ist A = 4581.

Es ist ferner log. 4582 = 3,6610551

Abgezogen log. 4581 = 3,6315452

Diff. = 0,0295099

Also $$B = 4581 + \frac{189}{295099} = 4581,0006$$

und $$k = \frac{B}{10^6} = 0,0045810006$$

Ich setze die Resultate so hierher, wie die Rechnungen sie geben. In der Ausübung hat man so genaue Bestimmungen fast nie nöthig, und rechnet daher gewöhnlich weit kürzer.

Soll z. B. wie im 1ten Ex. die zum Logarithmen 0,6537492 gehörige Zahl gesucht werden, so setzt man dafür 3,6537492 und sucht in den Tafeln den nächstkommenden Logarithmen auf, welcher dann = 3,6536948 gefunden wird; die zugehörige Zahl ist 4505, also eigentlich

B = 4505,***....

und $$k = \frac{4505,***....}{1000} = 4,505....$$

Weil nun dieses Resultat in den meisten Fällen der Ausübung schon hinlänglich genau ist, so läßt man es dabei bewenden. In astronomischen Berechnungen fordert man freilich eine größere Schärfe.

§. 33.

Nunmehr lassen sich auch mittelst der gemeinen Tafeln, welche nur die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000 enthalten, die Logarithmen aller größeren Zahlen finden.

z. B. log. 6945378 = log. 6945,378 . 1000 = l. 1000 + l. 6945,378 = 3, + log. 6945,378.

§. 34.

Zum Beispiel, wie sehr logarithmische Berechnungen die Arbeit erleichtern, wollen wir folgenden Ausdruck nehmen.

$$\frac{(426 \cdot \sqrt{672})^3 \sqrt[4]{619}}{5489 \cdot \sqrt[3]{8495}}$$

Bezeichnen wir den Zähler mit Z, den Nenner mit N, und die herauskommende Zahl mit W, so ist

$$\frac{Z}{N} = W \text{ also } \log. Z - \log. N = l. W$$

Es ist aber

$$\log. Z = 3. \left(\log. 426 + \frac{l. 672}{2}\right) + \frac{l. 619}{4}$$

$$\log. N = l. 5489 + \frac{l. 8495}{3}$$

Nun ist	l. 426 = 2,6294096	l. 5489 =	3,7394932
	$\frac{1}{2}$ l. 672 = 1,4131846	$\frac{1}{3}$ · l. 8495 =	1,3097211
	4,0425942	log. N =	5,0492143
	× 3	log. Z =	12,8257052
	12,1277826	l. W =	7,7764909
	$\frac{1}{4}$ l. 619 = 0,6979226	also	
also	log. Z = 12,8257052	W =	59760000

Viertes Kapitel.

Von den Kombinationen.

§. 35.

Eine Zusammenstellung gegebener Größen, wobei blos auf die Größen selbst, nicht aber auf die Ordnung ihrer Zusammenstellung, Rücksicht genommen wird, heißt hier eine Kombination. Z. B. abc, abd, acd sind Kombinationen, die sich von den Buchstaben a, b, c und d machen lassen; die Kombination abc ließe sich auch durch acb oder bac oder cba ausdrucken, die Ordnung der Zusammenstellung wird als gleichgültig angesehen. Solche Kombinationen heißen Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen, Sexternen u. s. f. wenn sie 2 = 3 = 4 = 5 = 6 ꝛc. Größen enthalten. Jede Kombination wird als verschieden von einer andern betrachtet, sobald beide nur in einer einzigen Größe von einander abweichen.

§. 36.

Aufg. Die Anzahl verschiedener Amben, Ternen, Quaternen ꝛc. zu bestimmen, welche sich aus m Dingen nehmen lassen.

Aufl. 1. Ich bestimme zuerst, wieviele Kombinationen von m — 1 Dingen aus den m Dingen möglich sind. Da eine Kombination von m — 1 Dingen nur dadurch gemacht

werden kann, daß man von den m Dingen eines weg nimmt, so erhält man nothwendig m verschiedene Kombinationen von m — 1 Dingen.

Z. B. aus den 5 (= m) Buchstaben a, b, c, d, e erhält man 5 Kombinationen von 5 — 1 oder 4 Buchstaben: abcd, abce, abde, acde, bcde.

2. In jeder dieser m Kombinationen sind m — 2 Grössen mit noch einer verbunden.

Im angenommenen Beispiele 5 — 2 oder 3 Buchstaben mit noch einem z. B. abc mit d, und abc mit e

Da nun außer m — 2 Buchstaben noch 2 im Ganzen vorhanden sind, so findet die Zusammenstellung von m — 2 Buchstaben mit noch einem nothwendig jedesmal doppelt statt, so daß in den Kombinationen (No. 1.) jede Kombination von m — 2 Buchstaben mit noch einem nothwendig doppelt vorkommen muß.

In unserem Beispiele kommt die Kombination abc 2mal vor 1.) mit d, giebt abcd; 2.) mit e, giebt abce. Ebenso die Kombination abd 1.) mit c, giebt abcd; 2.) mit e, giebt abde u. s. f. Unter den Quaternen (No. 1.) kommt also jede Terne nothwendig 2mal vor.

3. Nimmt man also aus den m Kombinationen von m — 1 Buchstaben (No. 1.) alle Kombinationen von m — 2 Buchstaben besonders, so erhält man jede solche Kombination 2mal.

Z. B. die abc 2mal, die abd 2mal, die abe 2mal u. s. f.

4. Aber jede Kombination von m — 1 Buchstaben giebt uns nach (No. 1.) wieder m — 1 Kombinationen von m — 2 Buchstaben.

Jede Quaterne (z. B. die abcd) enthält 4 Ternen (abc, abd, acd, bcd).

Da wir nun m Kombinationen von m — 1 Buchstaben haben Wir haben in unserem Ex. 5 Kombinationen von 4 Buchstaben, oder 5 Quaternen.

so erhalten wir m . (m — 1) Kombinationen von m — 2 Buchstaben, wovon jede 2mal vorkommt; also nur $\frac{m.(m-1)}{2}$ verschiedene Kombinationen von m — 2 Buchstaben.

In unserem Ex. $\frac{5.4}{2} = 10$ Kombinationen von 5 — 2 oder 3 Buchstaben, also 10 verschiedene Ternen: abc, abd, abe, bcd, bce, cde, acd, ace, ade, bde.

Diese Anzahl von Kombinationen mag N heißen.

5. Da wir überhaupt m Buchstaben zum kombiniren angenommen haben, so muß jede Verbindung von m — 3 Buchstaben unter denen von m — 2 Buchstaben nothwendig 3mal vorkommen.

In unserem Ex. wo m = 5 ist, kommt z. B. die Ambe ab nothwendig 3mal vor

ab mit c
ab — d
ab — e

} dieses sind No. 4. die Ternen abc, abd und abe.

Wenn man also aus den N Verbindungen von m — 2 Buchstaben (No. 4.) alle Kombinationen von m — 3 Buchstaben herausnimmt, so erhält man jede solche Verbindung 3mal

wie im vorstehenden Ex. die Kombination ab.

6. Man hat aber m — 2 verschiedene Kombinationen von m — 3 Buchstaben, folglich erhalten wir aus solchen überhaupt (m — 2). N Kombination von m — 3 Buch-

staben, wovon aber jede 3mal vorkommt. Demnach erhalten wir nur $\frac{(m-2).N}{3}$ oder

$$\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}$$

verschiedene Kombinationen von m — 3 Buchstaben.

In unserem Ex. $\frac{5.4.3}{2.3}$ oder 10 Amben:

7. So findet man die Anzahl der Kombinationen von m — n Buchstaben, die sich aus m Buchstaben nehmen lassen, =

$$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)\ldots\times(m-(n-1))}{2.3.4.5\ldots\ldots\times n}$$

8. Jede Verbindung von m — n Buchstaben, die man aus m — n Buchstaben nimmt, läßt eine Verbindung von n Buchstaben übrig, folglich ist auch die Anzahl der Kombinationen von n Buchstaben, welche sich aus m Buchstaben machen lassen, =

$$\text{VIII.} = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots\ldots\times(m-(n-1))}{2.3.4\ldots\times n}$$

Z. B. Aus 100 Nummern lassen sich

$$\frac{100.99.98.97.96.95.94}{2.3.4.5.6.7}$$

Kombinationen von 7 Nummern machen.

Von 40 Karten können mir

$$\frac{40.39.38.37.36.35.34.33.32}{2.3.4.5.6.7.8.9} = 273438880$$

verschiedene Spiele zu 9 Karten in die Hände gegeben werden.

Man sieht, wie auf dieser Kombinationsrechnung Wahrscheinlichkeitsberechnungen beruhen.

Hätte sich z. B. Jemand in einem Walde von 100000 Stämmen drei im Sinne bemerkt, so wäre die Unwahrscheinlichkeit, diese 3 Stämme zu errathen, zur Wahrscheinlichkeit

$$\text{wie } \frac{100000 \cdot 99999 \cdot 99998}{2 \cdot 3} : 1$$

$$= 166661666700000 : 1$$

Wer 100 Stämme heraus sucht, um jene 3 darunter zu erhalten, der hat mit diesen 100 schon $\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{2 \cdot 3} = 161700$ Ternen; bei ihm ist also die Unwahrscheinlichkeit zur Wahrscheinlichkeit wie 16666166670000 : 1617. Er hat 161700mal so große Wahrscheinlichkeit, die 3 Stämme zu errathen, als der welcher nur 3 Stämme herausnimmt. Weiter unten (beim binomischen Lehrsatze) werden wir aber einen ganz andern Gebrauch von (VIII.) machen, der für die gesammte Analysis von der größten Wichtigkeit ist.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Gleichungen.

§. 37.

Eine Gleichung ist ein arithmetischer Ausdruck, welcher die Gleichheit zweier Größen bezeichnet

z. B. $5x = 45$; $2x + 13 = 42$; $4x^2 - 96 = 304$; $6x^2 - 20 = 4x + 10$; $ax = b$; $ax^2 - bx = c$; $ax^3 + bx = cx^2 - d$ ꝛc.

§. 38.

Größen, welche als gegeben angenommen werden, sind entweder bestimmte Zahlen, oder sie werden durch Buchstaben, gewöhnlich durch die ersteren des Alphabets (a, b, c, d, e . . . oder A, B, C, D, E . . . . oder α, β, γ, δ, ε . . .) ausgedruckt; im ersteren Falle heißt die Gleichung eine numerische, wie $4x^2 - 96 = 304$. Größen, welche als noch unbekannt in einer Gleichung vorkommen, deren Werth (Quantität) erst noch aus der Gleichung abgeleitet werden soll, werden gewöhnlich mit den letzteren Buchstaben des Alphabets bezeichnet (z, y, x, v . . . .). Die als bekannt angenommene Größe, mit welcher eine unbekannte multiplicirt ist, heißt der Koëfficient der letzteren. In $5x = 45$ ist 5 der Koëfficient von x; in $ax^2 + bx = cx^2 - d$ sind a, b, c Koëfficienten von x^3,

von x und von x^2. Eine unbekannte Größe ohne vorgesetzten Koëfficient hat doch allemal die 1 zum Koëfficient. Die Koëfficienten können auch Brüche seyn z. B. in $x^2 + \frac{bx}{a+c} - dx = e + \frac{fx}{g}$ ist 1 der Koëfficient von x^2; $\frac{b}{a+c}$, $-d$ und $\frac{f}{g}$ sind Koëfficienten von x. In $ax^2 + \frac{x}{b+3} = mx - \frac{x^2}{c}$ sind a und $-\frac{1}{c}$ Koëfficienten von x^2; $\frac{1}{b+3}$ und m Koëfficient von x.

§. 39.

Jede Gleichung muß zur Entwickelung der unbekannten Größen gehörig geordnet seyn. Zu einer geordneten Gleichung, in welcher eine Größe als unbekannt angenommen wird, gehört folgende Form:

IX. $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + px = A$

oder auch, welches dasselbe ist,

X. $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + px - A = o$

wo m eine ganze Zahl bezeichnet.

Es können nämlich verschiedene Potenzen der unbekannten Größe in der Gleichung vorkommen, wodurch sich dann die verschiedenen Glieder der Gleichung ergeben.

Man darf aus der vorstehenden Form nicht schließen, daß in einer Gleichung alle Potenzen von der höchsten bis zur niedrigsten vorkommen müßten. Es können Zwischenglieder fehlen; dann darf man nur den Koëfficient eines solchen Zwischengliedes $= o$ setzen. Auch können Glieder mit dem verneinten Zeichen vorkommen; dann darf man für den Koëfficient eines solchen Gliedes nur seinen verneinten Werth setzen.

Z. B. die Gleichung $x^5 - 4x^3 + x^2 + 20 = 0$ mit (X) verglichen giebt $m = 5$, $a = 0$, $b = -4$, $c = 1$, $p = 0$, $A = -20$.

In der Form für eine geordnete Gleichung (IX oder X) sind nachstehende Forderungen enthalten:

1) Die höchste Potenz der unbekannten Größe soll keinen andern Koëfficient haben als die 1.
2) Das Glied, welches die höchste Potenz enthält, muß allemal bejaht seyn.
3) Kein Glied darf einen gebrochenen oder verneinten Exponent einer Potenz der unbekannten Größe enthalten.
4) Die unbekannte Größe darf nirgend als Divisor oder als Theil eines Divisors vorkommen.
5) Ein Glied der Gleichung muß x^0 enthalten, wie oben A, welches mit $A . x^0$ einerlei ist (§. 10).

Wie nun jede Gleichung auf diese Form gebracht werden kann, werden wir in der Folge zeigen.

§. 40.

Eine bestimmte Gleichung heißt eine solche, in der nur eine Größe als unbekannt vorkommt, eine unbestimmte ist eine solche, in welcher mehr als eine unbekannte Größe enthalten ist.

Z. B. $3x + 5 = 4y$ ist eine unbestimmte numerische Gleichung; $ax + b = my$, $x^2 + cx = dy^3 - ey^2 + f$ sind unbestimmte allgemeine Gleichungen.

Sollen mehrere unbekannte Größen gefunden werden oder durch angegebene Relationen bestimmt seyn, so muß man soviele verschiedene von einander unabhängige Gleichungen zwischen den unbekannten Größen haben, als unbekannte Größen vorhanden sind. Es ist aber hinlänglich, wenn z. B.

von den für 5 unbekannte Größen gegebenen 5 Gleichungen die erste nur eine, die 2te zwei, die 3te drei, die 4te vier, und die 5te alle fünf unbekannte Größen enthält. Z. B.

1) $ax + b = \frac{c}{x}$ s. unten §. 60.

2) $dx^2 + ey = fx - g$ 4ten Ex.

3) $x^2 + hy - kv = my^2 - cx$

4) $x + ny^2 - pv^2 = qw + rv$

5) $y^3 - aw^2 + \alpha z = \beta z^2 - \gamma v + \delta v^2$

Hier ist aber die erste schon eine bestimmte Gleichung.

§. 41.

In Bezug auf eine als unbekannt angenommene Größe heißt eine Gleichung eine einfache oder eine Gleichung vom 1ten Grade, wenn sie nach gehöriger Anordnung (§. 39.) nur die 1te Potenz der unbekannten Größe enthält, wie $x + a = o$.

Kommt die 2te, 3te ... mte Potenz der als unbekannt angenommenen Größe in der Gleichung vor, so ist die Gleichung eine vom 2ten, vom 3ten, vom mten Grade. Kommt in einer Gleichung vom mten Grade nur die mte Potenz der unbekannten Größe vor, so heißt sie eine reine Gleichung vom mten Grade; kommen außer der mten Potenz auch noch niedrigere vor, so ist die Gleichung eine unreine.

Beispiele von reinen:

$$x^2 + b = o;\ x^3 - c = o;\ x^m - p = o.$$

Beispiele von unreinen:

$$x^2 + bx = c;\ x^3 - ax^2 = b;\ x^5 + ax^3 + bx = m;\ x^4 + ax^3 + bx^2 - cx = d;$$

$$x^m + ax^{m-2} + bx^{m-3} + cx^{m-4} \ldots + p = o.$$

Alle Gleichungen vom 2ten und höheren Graden heißen höhere Gleichungen.

Die allgemeine Form aller höheren Gleichungen hat man §. 39. (IX u. X).

Ist $m = 2$, so heißt die Gleichung insbesondere auch eine quadratische; ist $m = 3$ oder $= 4$, so hat man eine kubische oder eine biquadratische; alle solche Gleichungen können übrigens numerische oder literale Gleichungen seyn, oder auch theilweise numerisch.

Numerische: $x^3 + 10x^2 - 4x = 60$;
$x^4 - 2x^3 + 8x = 40$

Literale: $x^3 - ax^2 = b$; $x^4 + ax^3 - bx = c$.
$x^4 + ax^4 - bx^2 + cx = d$

Theilw. numerische: $x^3 + ax^2 - 3x = 40$
$x^4 - 10x^3 + 4x^2 - ax = 50$
$x^5 - 8x^3 - 2x^2 + ax = b$

§. 42.

Alle Gleichungen von der Form X, oder die sich auf diese Form bringen lassen, heißen algebraische Gleichungen, und ihre Glieder algebraische. Der allgemeine Ausdruck eines algebraischen Gliedes ist also $\alpha . x^n$, so daß n eine gegebene ganze Zahl bezeichnet, weil eine geordnete Gleichung vorausgesetzt wird. Eine Gleichung, die sich nicht auf diese Form (X) bringen läßt, heißt eine transscendentische.

Zu den transscendentischen Gleichungen gehören auch die Exponentialgleichungen, bei welchen nämlich die unbekannte Größe irgendwo als Exponent einer Potenz vorkommt.

z. B. $ax + b^x = C$; $ax^2 + b^x = C$.

Auch logarithmische Gleichungen sind transscendentisch z. B.

$$ax + b \cdot \log. x = C$$

$$ax + b \cdot \log. (c + x) - dx^2 = A.$$

Ferner Gleichungen, welche sich auf trigonometrische Relationen der unbekannten Größe beziehen

z. B. $a - b \cdot \text{Sin.}\ x = 0$

$a + \text{Sin.}\ x - b \cdot \text{tang.}\ x = 0$

Von Aenderungen, die sich mit algebraischen Gleichungen vornehmen lassen.

§. 43.

Gleichungen vom 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Grade u. s. f. haben nach gehöriger Anordnung folgende Formen: wo einzelne Koëfficienten bejahte oder verneinte Werthe haben oder auch $= 0$ seyn können.

$$x + a = 0 \text{ (Null)}$$

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^3 + ax^2 + bx^2 + cx = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx^2 + dx = 0$$

u. s. f.

Vorgegebene Aufgaben zur Bestimmung einer unbekannten Größe leiten fast nie geradezu auf eine so geordnete Gleichung; dann muß aber die durch die Aufgabe geradezu gegebene Gleichung zuerst auf eine solche Form gebracht werden. Diese Formänderung beruht auf dem einfachen arithmetischen Axiom, daß gleiche Größen noch einander gleich bleiben, wenn man mit ihnen gleiche Aenderungen vornimmt.

Um nun zu vorstehenden Formen zu gelangen, muß man diejenigen arithmetische Aenderungen anwenden, wodurch die zu einerlei Potenz von x gehörigen Koëfficienten zu einem einzigen Faktor vereint werden.

Es sey z. B. die ursprüngliche Gleichung folgende:

$16.x^4 - 5x^3 + 8x^2 = 2x^4 + 7x^3 - 4x + 20$

so soll solche so umgeformt werden, daß zur Rechten die o (Null) zu stehen kommt. Man darf also nur folgende Operation auf beiden Seiten vornehmen:

$$16.x^4 - 5x^3 + 8x^2 = 2x^4 + 7x^3 - 4x + 20$$
$$\text{Abgez. } 2x^4 + 7x^3 - 4x + 20; \text{ Abg. } 2x^4 + 7x^3 - 4x + 20$$
$$14x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 4x - 20 = 0$$

Man sieht, daß hierbei die Glieder zur Rechten nur mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die linke Seite gesetzt werden.

Es sey die ursprüngliche Gleichung

$$ax^5 + bx^4 - cx = dx^5 - ex^4 + fx - g$$

so hat man

$$\text{Abgez. } dx^5 - ex^4 + fx - g \mid dx^5 - ex^4 + fx - g$$
$$(a-d).x^5 + (b+e).x^4 - (c+f).x + g = o$$

Dasselbe kann auch durch Addition geschehen, wo dann alle zur Rechten stehende Glieder mit ihrem entgegengesetzten Zeichen auf beiden Seiten addirt werden müssen. Z. B.

$$ax^5 + bx^4 - cx = dx^5 - ex^4 + fx - g$$
$$\text{Add. } -dx^5 + ex^4 - fx + g \quad \text{Add. } -dx^5 + ex^4 - fx + g$$
$$(a-d).x^5 + (b+e).x^4 - (c+f).x + g = o$$

wie vorhin.

§. 44.

Kommen eine oder mehrere Potenzen der unbekannten Größe als Divisoren vor, so ist diejenige Formänderung nöthig, durch welche ein solcher Divisor beseitigt oder weggeschafft wird. Dieses kann nur durch Multiplikation geschehen.

1. Ex. Es sey die ursprüngliche Gleichung

$$ax^4 - \frac{b + cx}{x} + \frac{d - ex}{mx^2} = fx - g$$

so erhält man zuerst

Add. $-fx + g$ Add. $-fx + g$

$$ax^4 - \frac{b + cx}{x} + \frac{d - ex}{mx^2} - fx + g = 0$$

Jetzt müssen alle Glieder zur Linken auf einerlei Benennung gebracht werden. Man kann ihnen sehr leicht den Nenner mx^2 geben; nämlich

$$\frac{amx^6}{mx^2} - \frac{bmx + cmx^2}{mx^2} + \frac{d - ex}{mx^2} - \frac{fmx^3}{mx^2} + \frac{mgx^2}{mx^2} = 0$$

Multiplicirt man nun durchaus mit mx^2, zur Linken und zur Rechten, so bleibt

$$amx^6 - (bmx + cmx^2) + d - ex - fmx^3 + mgx^2. = 0$$

oder

$$amx^6 - fmx^3 + (mg - cm).\ x^2 - (bm + e).\ x + d = 0$$

Um nun auch noch die höchste Potenz (x^6) von ihrem Koëfficient (am) zu befreien, darf man nur noch durchaus mit am dividiren. Dieses giebt

$$x^6 - \frac{f}{a}.\ x^3 + \frac{g - c}{a}.\ x^2 - \left(\frac{b}{a} + \frac{e}{am}\right).\ x + \frac{d}{am} = 0$$

welches nun eine vollkommen geordnete Gleichung vom 6ten Grade ist.

2. Ex. Es sey

$$ax^3 + b + \frac{c - x}{d - x} + \frac{fx + g}{x^2} = hx^4 - \frac{k}{x} + p$$

Um das Glied, welches die höchste Potenz von x enthält, bejaht zu lassen, zieht man zuerst den linken Theil der Gleichung zu beiden Seiten ab. Dieses giebt

$$hx^4 - \frac{k}{x} + p - ax^3 - b - \frac{c - x}{d - x} - \frac{fx + g}{x^2} = o$$

Wir können hier alles auf einerlei Benennung bringen, indem wir allen Gliedern den Divisor $(d - x) . x^2$ geben. Hiermit erhalten wir

$$\frac{(d - x) . x^2 . hx^4}{(d - x) . x^2} - \frac{k . (d - x) . x}{(d - x) . x^2} + \frac{p . (d - x) . x^2}{(d - x) . x^2}$$
$$- \frac{ax^3 . (d - x) . x^2}{(d - x) . x^2} - \frac{b . (d - x) . x^2}{(d - x) . x^2} - \frac{(c - x) . x^2}{(d - x) . x^2}$$
$$- \frac{(fx + g) . (d - x)}{(d - x) . x^2} = o$$

Wird durchaus mit $(d - x) . x^2$ multiplicirt, so bleibt noch

$h . (d - x) . x^6 - k . (d - x) . x + p . (d - x) . x^2$
$- ax^3 . (d - x) . x^2 - b . (d - x) . x^2 - (c - x) . x^2$
$- (fx + g) . (d - x) = o$

Es ist aber $(d - x) . x^6 = dx^6 - x^7$; $(d - x) . x = dx - x^2$ u. s. f. Man erhält hiernach

$hdx^6 - hx^7 - kdx + kx^2 + (p - b) . dx^2$
$- (p - b) . x^3 - adx^5 + ax^6 - cx^2 + x^3$
$- dfx - dg + fx^2 + gx = o$

Ordnet man die Glieder nach den Potenzen von x, so wird

$- hx^7 + (hd + a) . x^6 - adx^5 + (1 + b - p) . x^3$
$+ (pd - bd + k - c + f) . x^2$
$- (kd + df - g) . x - dg = o$

Weil aber das Glied, welches die höchste Potenz der unbekannten Größe enthält, allemal bejaht ausgedruckt seyn soll,

so darf man nur durchaus mit — 1 multipliciren oder durchaus die entgegengesetzten Zeichen nehmen. Wenn nämlich $a - b = 0$ ist, so ist auch $b - a = 0$.

Hiermit wird

$$hx^7 - (hd + a).x^6 + ad.x^5 - (1 + b - p).x^3 - (pd - bd + k - c + f).x^2 + (kd + df - g).x + dg = 0$$

Wird noch durchaus mit h dividirt, so erhält man

$$x^7 - \frac{hd + a}{h}.x^6 + \frac{ad}{h}.x^5 - \frac{1 + b - p}{h}.x^3 - \frac{pd - bd + k - c + f}{h}.x^2 + \frac{kd + df - g}{h}.x + \frac{dg}{h} = 0$$

Eine Gleichung vom 7ten Grade nach der Form

$$x^7 + \alpha x^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 + \zeta x + \eta = 0$$

Dabei ist aber $\gamma = 0$; $\alpha = -\frac{hd + a}{h}$, $\beta = \frac{ad}{h}$ u. s. f.

§. 45.

Aufg. Jede Gleichung, worin Potenzen von x mit gebrochenen Exponenten vorkommen, nach IX oder X umzuformen, oder sie in eine andere zu verwandlen, deren Exponenten durchaus ganze Zahlen sind.

Aufl. Es seyen m, m′, m″ etc. und n, n′, n″ etc. ganze Zahlen, und

$$x^{\frac{m}{n}} + ax^{\frac{m'}{n'}} + bx^{\frac{m''}{n''}} + cx^{\frac{m'''}{n'''}} \ldots + E = 0$$

so bringe man alle Brüche $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n'}$ etc. auf gemeinschaftliche kleinste Benennung, so daß die Gleichung unter folgender Form erscheint

$$x^{\frac{\alpha}{\mu}} + ax^{\frac{\beta}{\mu}} + bx^{\frac{\gamma}{\mu}} + \ldots\ldots + E = 0$$

$$x^{\frac{z}{\mu}}$$

Jetzt setze man $x^{\frac{z}{\mu}}$ oder $\sqrt[\mu]{x} = y$, so wird

$$y^{\alpha} + ay^{\beta} + by^{\gamma} + \ldots\ldots + E = 0$$

Hat man aus dieser Gleichung den Werth oder die Werthe von y gefunden, so hat man auch die von $x = y^{\mu}$

1. Ex. Aus $\sqrt{x} + a\sqrt[3]{x} + b\sqrt[4]{x} + E = 0$

oder $x^{\frac{1}{2}} + ax^{\frac{1}{3}} + bx^{\frac{1}{4}} + E = 0$

wird

$$x^{\frac{6}{12}} + ax^{\frac{4}{12}} + bx^{\frac{3}{12}} + E = 0$$

also, $x^{\frac{1}{12}} = y$ gesetzt

$$y^6 + ay^4 + by^3 + E = 0$$

Die Gleichung ist also vom 6ten Grade, und für jeden Werth von y hat man $x = y^{12}$.

2. Ex. Es sey $\frac{a}{x} + \frac{b - x}{\sqrt{x}} - \frac{c + x}{d + \sqrt{x}} = ex - f$

so hat man zur Anordnung dieser Gleichung folgende Rechnung:

$$\frac{a}{x} + \frac{b - x}{\sqrt{x}} - \frac{c + x}{d + \sqrt{x}} - ex + f = 0$$

Nun ist $x.\sqrt{x}.(d + \sqrt{x}) = x^{\frac{3}{2}}.(d + x^{\frac{1}{2}}) = d.x^{\frac{3}{2}} + x^2$.

Man erhält also, alles auf diese Benennung gebracht,

$$\left.\begin{array}{c} a dx^{\frac{1}{2}} + ax + (b - x).(dx + x^{\frac{3}{2}}) \\ -(c + x).x^{\frac{3}{2}} - ex.(dx^{\frac{3}{2}} + x^2) \\ + f.(dx^{\frac{3}{2}} + x^2) \end{array}\right\} = 0$$

$$dx^{\frac{3}{2}} + x^2$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} a dx^{\frac{1}{2}} + ax + bdx + bx^{\frac{3}{2}} - dx^2 - x^{\frac{5}{2}} \\ -cx^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}} - edx^{\frac{5}{2}} - ex^3 + fdx^{\frac{3}{2}} \\ + fx^2 \end{array}\right\} = 0$$

Weil hier das Glied $-ex^3$ die höchste Potenz von x enthält, so nehmen wir durchaus die entgegengesetzte Zeichen, und schreiben nach den Graden der Potenzen

$$\left.\begin{array}{c} ex^3 + (2 + ed).x^{\frac{5}{2}} + (d - f).x^2 \\ -(b - c + fd).x^{\frac{3}{2}} - (a + bd)x - adx^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} ex^{\frac{6}{2}} + (2 + ed).x^{\frac{5}{2}} + (d - f).x^{\frac{4}{2}} \\ -(b - c' + fd).x^{\frac{3}{2}} - (a + bd).x^{\frac{2}{2}} - adx^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} = 0$$

Nun sey $x^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{x} = y$, so hat man

$$\left.\begin{array}{c} ey^6 + (2 + ed).y^5 + (d - f).y^4 - (b - c + fd).y^3 \\ -(a + bd).y^2 - ady \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} y^6 + \frac{2 + ed}{e}.y^5 + \frac{d - f}{e}.y^4 - \frac{b - c + fd}{e}.y^3 \\ -\frac{a + bd}{e}.y^2 - \frac{ad}{e}.y \end{array}\right\} = 0$$

Ist hieraus y gefunden, so hat man auch $x = y^2$.

Anm. Anfänger werden wohl thun, wenn sie sich bei diesem und dem vorigen §. etwas aufhalten, und zuerst die hier vorgegebenen Gleichungen noch einmal ohne Beihülfe dieser Schrift für sich richtig zu ordnen suchen, dann in selbst gegebenen Beispielen ihre Kräfte versuchen, um sich eine Geläufigkeit zu erwerben, weil auf dieser Anordnung der Gleichungen die Erfindung der unbekannten Größen beruht.

§. 46.

Aufg. Aus einer Gleichung, wie

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + E = 0$$

eine andere

$$y^m + \alpha y^{m-1} + \beta y^{m-2} + \gamma y^{m-3} \ldots + F = 0$$

zu machen, so daß $y = n \cdot x$ sey

Aufl. Weil nach der Forderung $x = \frac{y}{n}$ seyn muß, so hat man

$$\frac{y^m}{n^m} + a.\frac{y^{m-1}}{n^{m-1}} + b.\frac{y^{m-2}}{n^{m-2}} + c.\frac{y^{m-3}}{n^{m-3}} \ldots + E = 0$$

oder, indem man durchaus mit n^m multiplicirt,

$$y^m + na.y^{m-1} + n^2 b.y^{m-2} + n^3 c.y^{m-3} \ldots + n^m E = 0.$$

wo das Gesetz der Verwandlung gleich ins Auge fällt.

Ex. Es sey $x^3 + ax^2 + bx + E = 0$, so daß x eine Zahl sey, die sich auf Decimalzolle bezieht; man soll die Gleichung so umformen, daß sich die unbekannte Größe der umgeformten Gleichung auf Duodecimalzolle bezieht. Es soll also, wenn die letztere mit y bezeichnet wird, $x =$

$\frac{5}{6}$ y seyn; demnach $\frac{1}{n} = \frac{5}{6}$ oder $n = \frac{6}{5} = 1,2$ und man hat

$$y^3 + 1,2 . ay^2 + 1,44 . by + 1,728 . E = 0$$

Wäre $a = -5$, $b = 3$, $E = -2$, so hätte man

$$y^3 - 6 . y^2 + 4,32 . y - 3,456 = 0$$

§. 47.

Alle quadratische Gleichungen sind unter der Form

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

wo α und β bejahte oder verneinte Werthe bezeichnen können. Hier kann nun allemal

XI. $x^2 + \alpha x + \beta = (x - a) . (x - b)$

gesetzt werden, so daß es allemal bestimmte Werthe oder Zahlen geben muß, welche man statt a und b setzen kann, um XI zu erhalten.

Es ist nämlich

$$(x - a) . (x - b) = x^2 - (a + b) . x + ab$$

Soll nun $x^2 + \alpha x + \beta = x^2 - (a + b) . x + ab$ seyn, so müßte

$$1)\ \alpha = -(a + b);\quad 2)\ \beta = ab$$

seyn. Man hat also für die beiden noch unbekannten Grössen a und b zwei Gleichungen, wodurch sie bestimmte Werthe erhalten.

Jede kubische Gleichung läßt sich durch

$$x^3 + \alpha x^3 + \beta x + \gamma = 0$$

ausdrucken, und es giebt allemal bestimmte Werthe von a, b, c, die so beschaffen sind, daß

XII. $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - a) . (x - b) . (x - c)$

wird, oder daß

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^3 - ax^2 + abx - abc$$
$$- bx^2 + bcx$$
$$- cx^2 + acx$$

werd. Hierzu wird nämlich erfordert, daß

1) $\alpha = -(a + b + c)$; 2) $\beta = ab + bc + ac$

3) $\gamma = -abc$

werde. Es werden aber durch diese drei Gleichungen die 3 unbekannten Größen a, b, c bestimmt.

Jede biquadratische Gleichung ist unter der Form

XIII. $x^4 \mp \alpha x^3 + \alpha x^2 + \gamma x + \delta = 0$

begriffen; und es lassen sich allemal Zahlen für a, b, c, d so angeben, daß

$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$

wird, oder $x^4 \mp \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$$= x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx \mp abcd$$
$$- bx^3 + bcx^2 - abdx \qquad (\odot$$
$$- cx^3 + acx^2 - bcdx$$
$$- dx^3 + bdx^2 - acdx$$
$$+ adx^2$$
$$+ cdx^2$$

wo man für die noch unbekannten 4 Größen a, b, c, d wieder 4 Gleichungen hat

1) $\alpha = -(a + b + c + d)$; 2) $\beta = ab + bc + ac + bd + ad + cd$

3) $\gamma = -(abc + abd + bcd + acd)$; $\delta = abcd$

Ebenso für alle höhere Gleichungen.

§. 48.

Die weitere Betrachtung solcher Gleichungen führt uns nun zu ihrer näheren Kenntniß. Wir wollen zu dem Ende die XIII zum Grunde legen.

Soll $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ seyn (wo wir α den ersten, und δ den letzten Koëfficient nennen), so kann man dafür

XIV. $(x - a).(x - b).(x - c).(x - d) = 0$ setzen. Diese Gleichung findet offenbar für 4 verschiedene Fälle statt

1) für $x = a$; 2) für $x = b$; 3) für $x = c$, und 4) für $x = d$. Folglich findet auch XIII für 4 verschiedene Werthe von x statt; oder in jeder biquadratischen Gleichung giebt es für die unbekannte Größe 4 verschiedene Werthe a, b, c, d, welche Wurzeln der Gleichung genennt werden. Ebenso hat jede quadratische Gleichung 2 Wurzeln, jede kubische 3, jede Gleichung vom mten Grade m Wurzeln.

Es sey z. B. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$; so ist 1) $x = 2$; 2) $x = -3$; 3) $x = 4$. Diese 3 Werthe geben

$$8 - 12 - 20 + 24 = 0$$
$$-27 - 27 + 30 + 24 = 0$$
$$64 - 48 - 40 + 24 = 0$$

und die wirkliche Multiplikation giebt

$$(x - 2).(x + 3).(x - 4) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

Die einzelnen Faktoren $x - 2$, $x + 3$, $x - 4$ oder allgemein $x - a$, $x - b$, $x - c$ etc. nennen wir Wurzelfaktoren. Diese Wurzelfaktoren geben die Wurzelgleichungen $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$ etc.

§. 49.

$-a$, $-b$, $-c$ etc. sind also die den Wurzeln entgegengesetzten Größen. Vergleicht man §. 47. ⊙ mit XIII, so ersieht man leicht das Verhalten der Wurzeln zu den Koëfficienten α, β, γ etc. Es ist nämlich

α die Summe der den Wurzeln entgegengesetzten Größen.

β die Summe aller Amben dieser Größen, nämlich $(-a)$. $(-b)$ oder ab; $(-b)$. $(-c)$ oder bc. etc.

γ die Summe aller Ternen, nämlich (— a). (— b). (— c) oder — abc; (— a). (— b). (— d) oder — abd. etc.

δ die Summe aller Quaternen dieser Größen, welches hier nur eine Quaterne giebt, u. s. f.

Für eine Gleichung vom mten Grade, welche allemal m Wurzeln hat, besteht also (§. 36. VIII.)

α aus m einfachen Theilen

β aus $\frac{m.(m-1)}{2}$ Amben

γ aus $\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}$ Ternen

δ aus $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3.4}$ Quaternen

ε aus $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{2.3.4.5}$ Quinternen

u. s. f.

§. 50.

Ist $a = b = c = d$ etc., so ist

$$(x-a).(x-b).(x-c)\ldots = (x-a).(x-a).(x-a)\ldots$$

$$= (x-a)^m$$

wenn nämlich m dergleichen Wurzelfaktoren vorhanden sind. Man hat also

$$(x-a)^m = x^m + m.(-a).x^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{2}a^2.x^{m-2}$$

$$+ \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}.a^3.x^{m-3}$$

$$+ \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3.4}a^4.x^{m-4}$$

$$\vdots$$

$$\pm a^m.x^0$$

oder

$$\text{XIV. } (x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{2} a^2 x^{m-2}$$

$$- \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}. a^3 x^{m-2}$$

$$(\mathfrak{C}) \quad + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3.4} a^4 x^{m-4}$$

$$\vdots$$

$$\pm a^m$$

Für $(x + a)^m$ ergiebt sich dieselbe Reihe, nur daß dann alle Glieder das Zeichen + vor sich haben.

§. 51.

Wird die hier zur Rechten stehende Reihe auf die qte Potenz erhoben, so daß q, wie vorhin m, eine ganze Zahl wäre, so ergäbe sich durch wirkliche Multiplikation

$$\mathfrak{h}) x^{mq} - mq.ax^{mq-1} + \frac{mq.(mq-1)}{2}. a^2 x^{mq-2} - \text{etc.}$$

Denn es ist $((x - a)^m)^q = (x - a)^{mq}$, man darf also nur mq im vorigen Ausdruck statt q schreiben. Wird also die obige Reihe (ℭ) q mal als Faktor niedergeschrieben, und die Multiplikation wirklich vorgenommen, so muß der Ausdruck (ℌ) nothwendig herauskommen.

Ist auch p eine ganze Zahl, und setzen wir in (ℭ) $\frac{p}{q}$ statt m, so wird

$$(x-a)^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}} - \frac{p}{q}. ax^{\frac{p}{q}-1} + \frac{\frac{p}{q}.(\frac{p}{q}-1)}{2} a^2 x^{\frac{p}{q}-2} - \text{etc.} \quad (\mathfrak{d}$$

Wird nämlich diese Reihe zur Rechten q mal als Faktor niedergeschrieben, und die Multiplikation wirklich verrichtet, so giebt sie nach dem vorhergehenden nothwendig

$$x^{\frac{p}{q}\cdot q} - \frac{p}{q}\cdot q\cdot a x^{\frac{p}{q}\cdot q-1} + \frac{\frac{p}{q}\cdot q\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot q-1\right)}{2}\cdot a^2 x^{\frac{p}{q}\cdot q-2} - \text{etc.}$$

oder

$$x^p - pax^{p-1} + \frac{p\cdot(p-1)}{2}\cdot a^2 x^{p-2} - \text{etc.}$$

wie sich gehört, denn es ist

$$\left((x-a)^{\frac{p}{q}}\right)^q = (x-a)^p$$

$$= x^p - pax^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}\cdot a^2 x^{p-2} - \text{etc.}$$

Also hat auch die Reihe (♄) ihre Richtigkeit.

Folglich gilt die Reihe (☾) auch noch in dem Falle, wann m ein Bruch ist.

§. 52.

Schreiben wir $p - q$ statt m in der Reihe (☾ §. 50.), so erhalten wir, $q < p$ angenommen.

$$(x-a)^{p-q} = x^{p-q} - (p-q)ax^{p-q-1} + \frac{(p-q)\cdot(p-q-1)}{2}\cdot a^2 x^{p-q-2} - \text{etc.} \quad (☿$$

auch

$$(x-a)^q = x^q - qax^{q-1} + \frac{q\cdot(q-1)}{2}\cdot a^2 x^{q-2} - \text{etc.} \quad (♀$$

beide Reihen ordentlich mit einander multiplicirt geben $(x-a)^{p-q} \cdot (x-a)^q$ oder $(x-a)^p$, also

$$x^p - pax^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} \cdot a^2 x^{p-2} - \text{etc.} \quad (Z$$

was auch p und q für bejahte Werthe haben mögen. Da nun die Reihe $(\varphi) = (x-a)^q$ ist, wenn nur q bejaht ist, so muß auch die Reihe (Ψ) richtig d. h. $= (x-a)^{p-q}$ seyn, was auch p und q für bejahte Werthe haben mögen, weil nur diese beiden Reihen mit einander multiplicirt das richtige Produkt (Z) geben können. Folglich gilt die Reihe (C §. 50.) für alle bejahte und verneinte ganze und gebrochene Werthe von m.

Anm. Dieser für die gesammte Analysis äußerst wichtige Satz (C §. 50.) ist unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes bekannt. Er heißt auch von seinem großen Erfinder der Newtonische Lehrsatz. Sein Gebrauch zeigt sich vorzüglich in Fällen, wo m ein Bruch ist.'

§. 53. *

Zur Darstellung von Wurzelausdrücken wird die Reihe noch bequemer, wenn man $x + bx$ statt $x + a$ schreibt. Dann wird nämlich $(x+bx)^m =$

$$x^m \cdot \left(1 + mb + \frac{m.(m-1)}{2} \cdot b^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2 \cdot 3} b^3 + \text{&c.}\right)$$

Ex. Man soll $\sqrt{2}$ angeben.

Hier soll $x + bx = 2$ seyn, also $b = \frac{2-x}{x}$ und $m = \frac{1}{2}$. Damit nun $x^{\frac{1}{2}}$ rational werde, so muß man

für x ein Quadrat nehmen z. B. $x = \frac{100}{49}$; dieses giebt

$$b = \frac{2}{x} - 1 = -0,02, \text{ also}$$

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2} \cdot 0,02 - \tfrac{1}{8} \cdot 0,0004 - \tfrac{1}{16} \cdot 0,000008 - \tfrac{5}{128} \cdot 0,00000016 - \ldots\ldots\right)$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \cdot 0,02 &= 0,0100000000 \\ \tfrac{1}{8} \cdot 0,0004 &= 0,0000500000 \\ \tfrac{1}{16} \cdot 0,000008 &= 0,0000005000 \\ \tfrac{5}{128} \cdot 0,00000016 &= 0,0000000625 \\ \hline & 0,0100050625 \end{aligned}$$

Diese Summe von 1 abgezogen, dann mit $\frac{10}{7}$ multiplicirt giebt

$$\begin{array}{r} 1,0000000000 \\ 0,0100050625 \\ \hline 0,9899949375 \end{array}$$

also

$$\sqrt{2} = 0,9899494937 \ldots$$

§. 53.

Aufg. Aus einer Gleichung wie

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots\ldots + E = 0$$

eine andere zu machen, in welcher der erste Koëfficient (α) einen verlangten Werth p erhält.

Aufl. Man setze $y + b$ statt x, so wird

$$x^m = y^m + m y^{m-1} b + \text{etc.}$$

$$\alpha x^{m-1} = \alpha y^{m-1} + \text{etc.}$$

Alle folgenden Glieder enthalten niedrigere Potenzen von y; die vorgegebene Gleichung verwandelt sich also in

$$y^m + (mb + \alpha) . y^{m-1} + \text{etc.} = 0$$

Nach der Forderung der Aufgabe soll nun

$$mb + \alpha = p$$

seyn; man hat also

$$\text{XV.} \quad b = \frac{p - \alpha}{m}$$

§. 54.

Die nützlichste Anwendung, welche man von vorstehendem Satze macht, ist die Wegschaffung des 2ten Gliedes einer geordneten höheren Gleichung. Für diesen Fall soll $p = 0$ werden, man hat also aus (XV.)

$$\text{XVI.} \quad b = -\frac{\alpha}{m}$$

Man darf daher nur $y - \frac{\alpha}{m}$ statt y setzen.

Ex. Es sey $x^3 + 9x^2 - 5x + 10$, so ist $\alpha = 9$, $m = 3$, man setzt also $y - \frac{9}{3}$ oder $y - 3$ statt y. Dieses giebt

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - 9y^2 + 9y - 27 \\ 9x^2 = & + 9y^2 - 54y + 81 \\ -5x = & - 5y + 15 \\ +10 = & + 10 \\ \hline x^3 + 9x^2 - 5x + 10 = & y^3 - 50y + 79 \end{array}$$

Demnach die neue Gleichung

$$y^3 - 50y + 79 = 0$$

§. 55.

Aufg. Es sey $-\phi$ (wo ϕ für sich bejaht oder verneint seyn mag) eine Wurzel der allgemeinen Gleichung

$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots + \zeta x + E = 0$

man soll diese Gleichung auf den nächstniedrigeren Grad $m - 1$ bringen.

Auflös. 1. Es sey $m = 5$, also

$x^5 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + E = 0$ (⊙

und nun die neue

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + F = 0$ (☾

so kommt es darauf an, die neuen Koëfficienten a, b, c, F zu bestimmen.

Es sey nun $-e$ eine Wurzel der Gleichung (⊙), also $x = -e$ oder $x + e = 0$, so ist $x + e$ ein Wurzelfaktor, und die biquadratische Gleichung (☾) mit dem Faktor $x + e$ multiplicirt muß nothwendig die vom 5ten Grade (⊙) wieder herstellen. Die wirkliche Multiplikation giebt nun

$$\left.\begin{array}{l} x^5 + (a+e).x^4 + (b+ae).x^3 + (c+be).x^2 \\ \qquad + (F+ce).x + Fe \end{array}\right\} = 0$$

Die Koëfficienten dieser Gleichung müssen mit denen der vorgegebenen (⊙) einerlei seyn. Also

$$\left.\begin{array}{l} a+e = \alpha \\ b+ae = \beta \\ c+be = \gamma \\ F+ce = \delta \\ Fe = E \end{array}\right\} \text{daher} \quad \begin{array}{l} a = \alpha - e \\ b = \beta - ae = \beta - (\alpha - e).e \\ c = \gamma - be = \gamma - (\beta - (\alpha - e).e) \\ F = \dfrac{E}{e} \end{array}$$

Setzt man also $\alpha - e = A$; $\beta - eA = B$; $\gamma - eB = C$, so hat man statt (☾)

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + (\alpha - e).x^3 + (\beta - eA).x^2 + (\gamma - eB).x \\ \qquad + \dfrac{E}{e} \end{array}\right\} = 0$$

2. Wäre die gegebene Gleichung

$x^6 + \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + E = 0$

und — f eine Wurzel dieser Gleichung, oder $x + f = 0$, so gäbe sich auf gleiche Weise, indem A den ersten, B den zweiten u. s. f. Koëfficient der neuen Gleichung vom 5ten Grade bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} x^5 + (\alpha - f).x^4 + (\beta - f.A).x^3 + (\gamma - fB).x^2 \\ + (\delta - fC).x + \frac{E}{f} \end{aligned}\right\} = 0$$

3. Allgemein wird nun, wenn $-\varphi$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung vom mten Grade und E ihr letztes Glied ist, aus ihr die folgende

XVII.
$$\left.\begin{aligned} x^{m-1} + (\alpha - \varphi).x^{m-2} + (\beta - \varphi A).x^{m-3} \\ + (\gamma - \varphi B).x^{m-4} \ldots\ldots + \frac{E}{\varphi} \end{aligned}\right\} = 0$$

wo $A = \alpha - \varphi$ ist, $B = \beta - \varphi A$ u. s. f.

Diese Veränderung ist für die Auflösung der Gleichungen sehr wichtig.

Ex. Es sey $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x - 48 = 0$

Setzt man $x = 2$, so wird

$$16 - 56 + 32 + 56 - 48 = 0$$

also $-\varphi = 2$ oder $\varphi = -2$. Es ist ferner $m = 4$, $\alpha = -7$, $\beta = 8$, $\gamma = 28$, $E = -48$; also die neue Gleichung

$$x^3 + (-7 + 2).x^2 + (8 + 2A).x + \frac{-48}{-2} = 0$$

wo $-7 + 2 = -5$, also $A = -5$ ist, daher

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$$

Diese kubische Gleichung können wir aufs Neue mit der

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + E = 0$$

vergleichen, und sie auf eine quadratische reduciren, wenn eine ihrer Wurzeln bekannt ist. Setzen wir $x = 3$, so wird

$$27 - 45 - 6 + 24 = 0$$

also jetzt $-\phi = 3$, $m = 3$, $\alpha = -5$, $\beta = -2$, $E = 24$, und die reducirte Gleichung wird

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Hier fällt gleich ins Auge, daß 4 eine Wurzel der Gleichung ist; bezeichnen wir die andere Wurzel mit b, so ist (§. 49.) das letzte Glied -8 hier $= -4 \times -b$, also $\frac{-8}{-4} = -b$, und $b = -2$, oder auch -2 (der 1te Koëfficient) $= -4 - b$, also $-2 + 4 - b$, folglich wie vorher $b = -2$.

§. 56.

Wenn a, b, c, d .... E für sich bejahte Größen bezeichnen, so wird das Bejaht- oder Verneintseyn der Wurzeln durch die Zeichen der Glieder entschieden. Man hat dabei auf die Folgen und auf die Abwechslungen von Zeichen zu achten. Zwei nach einander folgende Glieder mit einerlei Zeichen gelten für eine Folge; zwei dergleichen mit verschiedenen Zeichen gelten für eine Abwechslung. Z. B. die Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + E = 0$$

hat 4 Folgen

1) $x^4 + ax^3$; 2) $ax^3 + bx^2$; 3) $bx^2 + cx$; 4) $cx + E$

Die

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + E = 0$$

hat 4 Abwechslungen

1) $x^4 - ax^3$; 2) $-ax^4 + bx^2$; 3) $bx^2 - cx$; 4) $-cx + E$

Die

$$x^4 + ax^3 - bx^2 + cx - E = 0$$

hat 1 Folge und 3 Abwechslungen u. s. f.

§. 57.

Ein Produkt $(x + m).(x + n).(x + p).(x + q)\ldots = o$ giebt eine höhere Gleichung mit lauter Folgen.

Ein Produkt $(x - m).(x - n).(x - p).(x - q)\ldots = o$ giebt eine höhere Gleichung von lauter Abwechslungen.

Im ersteren Falle ist $x = -m$, $x = -n$, $x = -p$ etc. d. h. alle Wurzeln verneint; im letzteren $x = m$, $x = n$, $x = p$ etc. d. h. alle Wurzeln bejaht.

Daher die allgemeine Regel:

„Eine vollständig von der höchsten Potenz bis zur „oten (von x^m bis zu x^o) geordnete Gleichung von „lauter Folgen hat lauter verneinte Wurzeln; „eine dergleichen von lauter Abwechslungen lau„ter bejahte."

Jede Folge deutet auf eine verneinte, jede Abwechslung auf eine bejahte Wurzel.

Eine kubische Gleichung von der Form

$$x^3 + ax^2 + bx + E = o$$

hat 3 verneinte Wurzeln.

Eine von der Form

$$x^3 - ax^2 + bx - E = o$$

hat 3 bejahte.

Die

$$x^3 - ax^2 + bx + E = o$$

hat 2 bejahte und eine verneinte. Dieses läßt sich auch noch besonders beweisen. Weil nämlich E hier bejaht ist, so sind nur folgende Wurzeln möglich

entweder — m, — n und — p
oder m, n und — p
weil E das Produkt der 3 Wurzeln mit ihrem entgegengesetzten Zeichen seyn muß (§. 49.).

Weil aber der erste Koëfficient — a (nach §. 49.) zugleich die Summe der 3 Wurzeln mit ihren entgegengesetzten Zeichen seyn soll, so bleibt nur der Fall übrig, wo m, n und — p die Wurzeln sind, weil nur — m — n + p etwas verneintes geben kann, hingegen m + n + p allemal bejaht seyn würde. Allemal also, wenn der 1te Koëfficient verneint und das letzte Glied bejaht ist, hat die kubische Gleichung nothwendig 2 bejahte Wurzeln (m, n), und eine verneinte — p. Dieses gilt daher auch von der Form

$$x^3 - ax - bx + E = 0.$$

die aber gleichfalls 2 Abwechslungen und eine Folge hat.

Ist

$$x^3 + ax^2 + bx - E = 0 \quad (\odot$$

so können wegen des verneinten Gliedes — E nur die Wurzeln

m, n, und p oder — m, — n und p

statt finden, der erstere Fall gäbe aber für den 1ten Koëfficient einen verneinten Werth, also kann nur der letztere statt haben; es gehören also hier zu den 2 Folgen und einer Abwechslung 2 verneinte Wurzeln und eine bejahte.

Dieses gilt also auch für die Form

$$x^3 + ax^2 - bx - E = 0$$

Es kann ferner eine Gleichung wie

$$x^3 - ax^2 + bx - E = 0$$

nur aus

$$(x - m).(x - n).(x - p) = 0$$

entstehen, so daß hier zu den 3 Abwechslungen drei bejahte Wurzeln $x = m$, $x = n$, $x = p$ gehören. Für die mögliche Entstehung der Gleichung

$$x^3 - ax^2 - bx - E = 0$$

ist nur noch das Produkt

$$(x + m) . (x - n) . (x - p) = 0$$

übrig. Für diese letzte Form von einer Abwechslung und zwei Folgen hat man also wieder eine bejahte und 2 verneinte Wurzeln.

Es könnten zwar in Bezug auf das 2te und 4te Glied nach der Bemerkung zu (⊙) 3 bejahte Wurzeln statt finden, m, n, p. Dann würde aber der Koëfficient des 3ten Gliedes $= (-m) \times (-n) + (-m) . (-p) + (-n) . (-p) = mn + mp + np$ also bejaht, da er doch $-b$ also verneint seyn soll.

Bei den quadratischen Gleichungen ist der Satz weit leichter darzuthun; der Beweis wird aber desto verwickelter, je höher der Grad der Gleichung ist.

S. Klügels math. Wörterbuch 2. Bd. S. 429.

Sechstes Kapitel.

Von der Auflösung solcher Aufgaben, welche auf Gleichungen vom ersten Grade führen.

§. 58.

Eine Gleichung auflösen heißt: den Werth der in einer vorgegebenen Gleichung als unbekannt angenommenen Größe aus dieser Gleichung finden. Die Algebra hat es eigentlich nur mit Auflösung gegebener Gleichungen zu thun. Die Ueberschrift dieses Kapitels ist bei weitem umfassender, indem sie auch die Art und Weise, wie man bei vorgelegten Aufgaben zu den dahin gehörigen Gleichungen gelangen könne, mitzutheilen scheint. Aber eine solche Anweisung würde nothwendig Bekanntschaft mit Gegenständen der Art, wie sie in der Aufgabe vorkommen, voraussetzen, um aus schon bekannten Eigenschaften und Verhältnissen, welche in der vorgelegten Frage nicht angegeben sind, die wir aber durch unsere übrigen Kenntnisse zu ergänzen vermögen, zu den erforderlichen Gleichungen gelangen zu können. Eine Anweisung der Art läßt sich hier nicht erwarten; sie würde die Gränzen der reinen Mathematik überschreiten. Sie bleibt den besonderen Untersuchungen überlassen, welche in den verschiedenen Theilen der angewandten Mathematik über mannichfaltige Gegenstände angestellt werden, wo dann nicht selten die Erfindung der Gleichung weit schwieriger ist, als

die Auflösung der gefundenen Gleichung. Hier kann daher auch nur von solchen Aufgaben die Rede seyn, welche sämtliche zur Erfindung einer oder mehrerer unbekannten Größen erforderliche Bestimmungsstücke und ihr Verhalten gegen einander angeben. Weil aber auch bei der Auflösung solcher Aufgaben der Anfänger gewöhnlich den Weg, zu den Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Größen zu gelangen, weit schwieriger findet, als die Auflösung der Gleichungen selbst, so werde ich hier in mehreren Beispielen auf die Art und Weise, zu den erforderlichen Gleichungen zu gelangen, aufmerksam machen. Auf diesen Zweck deutet die Ueberschrift des Kapitels.

§. 59.

Die allgemeine Auflösung einer jeden Gleichung beruht zunächst darauf, sie auf die allgemeine Form

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots + \zeta x + E = 0$$

zu bringen, wovon wir im vorigen Kapitel gehandelt haben. Da hier nur von Gleichungen vom ersten Grade die Rede ist, wo $m = 1$ wird, und $\alpha, \beta \ldots \zeta = 0$ werden, so bleibt für alle zu diesem Kapitel gehörige Gleichungen nur die einfache Form

$$x + E = 0$$

übrig, wo E einen bejahten oder verneinten Werth haben mag.

Es gehören also nur solche Gleichungen hierher, welche sich nach dem vorigen Kapitel auf diese Form bringen lassen. Nach dieser Reduktion hat man

$$x = -E.$$

§. 60.

Einige Beispiele.

1. Ex. Man soll eine Zahl finden, welche 3mal genommen von 100 abgezogen die Zahl 10 giebt.

Die unbekannte Zahl hieße x, so soll

$$100 - 3 . x = 10$$

seyn, also

$$100 - 3x - 10 = 0$$

oder

$$3x + 10 - 100 \text{ d. i. } 3x - 70 = 0$$

und

$$x - \frac{70}{3} = 0$$

Jetzt ist die Form $x + E = 0$ hergestellt, indem hier $E = - \frac{70}{3}$ ist. Also nunmehr

$$x = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$$

2. Ex. Eine Zahl x von folgender Beschaffenheit zu finden: Wenn man ihr Doppeltes von ihrem Zehenfachen abzieht; den Rest mit 5 dividirt, zum Quotient 100 addirt, so soll 3mal soviel herauskommen, als wenn man 25 von ihr abzieht.

Das Doppelte der Zahl ist $2x$; ihr Zehenfaches $=$ $10 . x$; die Differenz mit 5 dividirt giebt $\frac{10 . x - 2 . x}{5}$;

hierzu 100 addirt wird $\frac{10 . x - 2x}{5} + 100$. Zieht man 25 von der gesuchten Zahl ab, so hat man $x - 25$; es soll also

$$\frac{10 . x - 2 . x}{5} + 100 = 3 . (x - 25)$$

werden.

Allemal, wo x in Verbindung mit andern Größen einen gemeinschaftlichen Faktor oder Divisor hat (wie hier 3 und 5), muß Faktor und Divisor weggeschafft werden.

Dieſes kann auf zweierlei Weiſe geſchehen:

1) indem man mit dem gemeinſchaftlichen Diviſor die einzelnen Glieder des zuſammengeſetzten Dividends dividirt, und ſo auch mit dem gemeinſchaftlichen Faktor die einzelnen Glieder des zuſammengeſetzten Faktors (hier $x - 25$) multiplicirt.

2) indem man auf beiden Seiten der Gleichung durchaus mit jenem Diviſor multiplicirt, und die Multiplikation mit jenem Faktor (hier 3) wie vorhin zur Rechten vornimmt.

Auf dem erſten Wege erhält man

$$2x - 0,4 . x + 100 = 3x - 75$$

Auf dem zweiten

$$10x - 2x + 500 = 15x - 375$$

Beides iſt gleichgültig. Behalten wir die Letztere, ſo wird

$$15x - 375 - 10x + 2x - 500 = 0$$

oder

$$7x - 875 = 0$$

alſo

$$x - \frac{875}{7} \text{ oder } x - 125 = 0$$

welches eine geordnete Gleichung vom 1ten Grade iſt. Daher

$$x = 125$$

In allgemeinen Ausdrücken hätte man

$$\frac{ax - bx}{c} + d = m . (x - e)$$

alſo

$$ax - bx + cd = mcx - mce$$

und

$$(a - b - mc) . x + cd + mce = 0$$

oder

$$x + \frac{cd + mce}{a - b - mc} = 0$$

Folglich

$$x = -\frac{cd + mce}{a - b - mc} = \frac{cd + mce}{b + mc - a}$$

3. Ex. Ein Bothe A ist schon m Täge abgereißt; in den ersten a Tägen legt er täglich f Meilen zurück, in den folgenden täglich g Meilen. Ein zweiter Bothe B wird ihm nach verflossenen m Tägen nachgeschickt; dieser soll in den ersten b Tägen täglich k Meilen zurücklegen, in den folgenden täglich e Meilen: Wann wird B den A einholen?

In den vorigen Aufgaben durfte man die Wortsprache nur geradezu in die Zeichensprache übertragen. Hier wird der Anfanger schon etwas mehr Schwierigkeit finden, zur Gleichung zu gelangen.

Zuerst muß die unbekannte Größe benamt werden. Dieses ist hier die Anzahl von Tägen, in welchen B den A einholt. Diese heiße x.

Wo nun die Aufgabe nicht geradezu angiebt, welche Größen einander gleich gesetzt werden sollen, um eine Gleichung zu erhalten, da muß genaue Erwägung der Aufgabe dazu leiten.

Die beiden Bestimmungen, daß die Bothen A und B von einem Orte ausgeschickt werden, und nach einer gewissen Zeit sich einholen sollen, haben zur Folge, daß die von beiden Bothen durchlaufenen Wege nothwendig gleich groß seyn müssen.

Wir dürfen also nur aus den Bestimmungen der Aufgabe die Größe der beiderseitigen Wege in den dahin gehörigen Buchstaben (bekannt oder unbekannt, gilt gleichviel) ausdrucken, und diese Ausdrücke einander gleich setzen.

Nun legt der Bothe A in den ersten a Tägen täglich f Meilen zurück, also in a Tägen a. f Meilen. Von den vorausgehabten m Tägen bleiben ihm nun noch m — a Täge übrig, wo er an jedem g Meilen zurücklegt, also in den

m — a Tägen (m — a). g Meilen. Während den x Tägen, in welchen ihm der B nachreißt, kommt er gleichfalls noch um x. g Meilen weiter; also ist der ganze

Weg von A $= a . f + (m - a) . g + x . g$

Der B legt in den ersten b Tägen b. k Meilen zurück; dann bleiben ihm bis zum Einholen noch x — b Täge übrig; in dieser Zeit durchwandert er noch (x — b). e Meilen; also der ganze

Weg von B $= b . k + (x - b) . e$

also

$$af + (m - a) . g + gx = bk + ex - be$$

und

$$af + (m - a) . g + (g - e) . x - (bk - be) = o$$

oder

$$x + \frac{af + (m - a) . g - b (k - e)}{g - e} = o$$

welches die Form $x + E = o$ ist.

Demnach

$$x = \frac{af + (m - a) . g - b . (k - e)}{e - g}$$

Anm. Dergleichen Literalgleichungen stellen uns das gegenseitige Verhalten aller in der Aufgabe vorkommenden Bestimmungsstücke vor Augen. Jede darin vorkommende Größe wird, wenn sie als die unbekannte angenommen wird, durch alle übrigen bestimmt, und es lassen sich daher so viele verschiedene Aufgaben mit ihren Auflösungen daraus ableiten, als Größen außer x vorhanden sind.

Um z. B. a zu finden, erhalten wir

$$(e - g) . x = af + mg - ag - b . (k - e)$$
$$(e - g) . x + (g - f) . a + b . (k - e) = mg$$

$$a + \frac{(e - g) . x + b . (k - e) - mg}{g - f} = o$$

also

$$a = \frac{(e - g) . x + b . (k - e) - mg}{f - g}$$

wo a als die unbekannte Größe angenommen wird, e, g, x, b, k, m und f aber gegebene Größen bezeichnen.

4. Ex. Drei Personen A, B, C sollen M Morgen Aecker unter sich vertheilen. A soll α Morgen mehr haben als B, und n mal soviel als C. Wieviel erhält jede?

Der Antheil von A sey $= x$
B $= y$
C $= z$

Drei unbekannte Größen erfordern 3 von einander unabhängige Gleichungen, welche sich auch hier aus den Bestimmungen der Aufgabe ergeben. Nämlich

1) $x = y + \alpha$; 2) $x = nz$; 3) $x + y + z = M$

Dieses sind 3 unbestimmte Gleichungen, welche zusammengenommen die 3 unbekannte Größen bestimmen.

Die Art der Ableitung der 3 Größen aus den 3 Gleichungen ist folgende:

Eine von den unbekannten Größen, welche in allen Gleichungen vorkommt, behandelt man zuerst, so als wäre sie die einzige unbekannte, ordnet nach ihr sämtliche Gleichungen, und bestimmt sogleich hieraus ihren Werth. Giebt eine oder die andere Gleichung den Werth der unbekannten schon an, so ist keine vorherige Anordnung nöthig, wie solches hier No. 1. und No. 2. der Fall ist.

Die einzige hier in allen 3 Gleichungen vorkommende ist die x, und man erhält aus (No. 3.)

4) $x = M - y - z$.

Aus den 3 Gleichungen No. 1, 2 und 4, welche von einander unabhängig sind, ergeben sich zwei neue von einander unabhängige. Nämlich aus (No. 1. u. 2.)

$$5)\ y + \alpha = nz$$

aus (No. 1. u. 4.)

$$6)\ y + \alpha = M - y - z$$

Zwar scheint nun auch noch die Vergleichung (No. 2. u. 4.) übrig zu seyn, welche uns $7)\ nz = M - y - z$ gäbe; dieses ist aber keine neue von den vorhergehenden unabhängige Bestimmung, indem sie schon unter No. 5. u. 6. offenbar mit enthalten ist. Wir können daher von den 3 Gleichungen (No. 5, 6 u. 7) nur zwei beibehalten, um eine neue Bestimmung abzuleiten. Es gilt übrigens gleich, welche zwei wir beibehalten wollen.

Man begreift hieraus, daß sich auf solche Weise allemal aus n Gleichungen, nur $n - 1$ neue ergeben; aber diese $n - 1$ neue Gleichungen enthalten auch nur noch $n - 1$ unbekannte Größen.

Behalten wir No. 5 u. 6 bei, so wird zwar

$$8)\ nz = M - y - z$$

aber diese Gleichung würde uns zu nichts führen.

Allemal muß daher in den erhaltenen neuen Gleichungen eine von den unbekannten Größen, welche in allen diesen Gleichungen vorkommt, aus jeder dieser Gleichungen bestimmt werden. Eine muß aber allemal in allen neuen Gleichungen vorkommen, wenn sämtliche ursprüngliche unbestimmte Gleichungen die oben (§. 40.) angegebene Beschaffenheit haben.

Hier kommt nun sowohl y als z in No. 5 u. No. 6 vor. Wir wollen y als die Unbekannte betrachten, so wird aus (No. 5.) $9)\ y + \alpha - nz = 0$ also $10)\ y = nz - \alpha$;

aus (No. 6.) 11) $y + \alpha - M + y + z$ oder $2y \pm \alpha - M + z = 0$, und 12) $y = \frac{M - \alpha - z}{2}$

Indem wir nun die beiden Werthe von y (No. 10 u. No. 12), welche zur Rechten die y nicht mehr enthalten, einander gleich setzen, erhalten wir 13) $nz - \alpha = \frac{M - \alpha - z}{2}$, welches eine bestimmte Gleichung ist.

Auf solche Weise wird eine unbekannte Größe nach der andern aus den vorgegebenen unbestimmten Gleichungen weggeschafft, bis man auf eine bestimmte kommt.

Aus (No. 13.) erhält man nun

$$2nz - 2\alpha + \alpha - M + z = 0$$

oder

$$(2n + 1) . z - \alpha - M = 0$$

also

$$14)\quad z - \frac{\alpha + M}{2n + 1} = 0$$

welches die geordnete Gleichung ist. Sie giebt endlich

$$15)\quad z = \frac{\alpha + M}{2n + 1}$$

Ist man mit der Rechnung so weit gekommen, daß man endlich eine unbekannte Größe, wie hier z, aus einer bestimmten Gleichung gefunden hat, so geht man rückwärts, um auch die übrigen nach und nach zu bestimmen.

Z. B. die (No. 10.) giebt uns aus (15.)

$$16)\quad y = n . \frac{\alpha + M}{2n + 1} - \alpha$$

und aus (No. 2.)

$$17)\quad x = n . \frac{\alpha + M}{2n + 1}$$

Man wählt hierzu unter den vorhergehenden Gleichungen die bequemsten.

Anm. Anfänger, denen es Ernst um die Wissenschaft ist, müssen sich ähnliche Beispiele geben, oder auch die vorstehende Aufgabe noch einmal für sich selbst aufzulösen suchen, und nicht eher weiter gehen, als bis ihnen diese Auflösung geläufig geworden ist. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Beispiele.

5. Ex. A, B und C sollen 3 verschiedene Weinsorten bezeichnen; 1 Maaß von A koste a kr., von B b kr., von C c kr. Man will daraus eine Mischung D machen, so daß von A pmal soviel zur Mischung komme als von C; die Maaß vom vermischten D soll m kr. kosten. Man sucht das Verhältniß der Mischung für eine Maaß

Aufl. Es sey

der erforderliche Antheil von A = x
— B = y
— C = z

so ist, wenn die Maaß als Einheit gilt 1) $x + y + z = 1$; ferner vermöge der Vorschrift 2) $x = pz$. und gleichfalls vermöge der Aufgabe 3) $x . a + y . b + z . c = m$.

Jede dieser 3 Gleichungen enthält z und x; wir suchen daher zuerst eine dieser beiden Größen z. B. z. Aus (No. 1.) wird 4) $z = 1 - y - x$; aus (No. 2.)

5) $z = \frac{x}{p}$; aus (No. 3.) $cz = m - by - ax$ also

6) $z) = \frac{m - by - ax}{c}$.

Aus 4 und 5 erhalten wir

$$7)\ 1 - x - y = \frac{x}{p}$$

Aus 5 und 6

$$8)\quad \frac{x}{p} = \frac{m - by - ax}{c}$$

Jede dieser Gleichungen enthält noch x und y. Wir nehmen also nach Willkühr eine von beiden als die Unbekannte an z. B. x. Aus (7) wird

$$p - px - py - x = 0$$

oder

$$p - py - (p + 1).\ x = 0$$

also

$$-x = \frac{p}{p+1}\cdot y + \frac{p}{p+1} = 0$$

oder

$$x + \frac{p}{p+1}\cdot y - \frac{p}{p+1} = 0$$

und

$$9)\quad x = \frac{p}{p+1} - \frac{py}{p+1}$$

Aus (8) wird, indem wir auf beiden Seiten mit pc multipliciren, $cx = pm - pby - apx$

also

$$cx + apx - pm + pby = 0$$

oder

$$(c + ap).\ x - pm + pby = 0$$

Demnach

$$x - \frac{pm}{c+ap} + \frac{pby}{c+ap} = 0$$

und

$$10)\quad x = \frac{pm - pby}{c + ap}$$

Aus 9 u. 10 erhalten wir endlich eine bestimmte Gleichung

$$11)\quad \frac{p - py}{p+1} = \frac{pm - pby}{c + ap}$$

Multipliciren wir auf beiden Seiten mit $(p + 1).(c + ap)$, so wird

$$(c + ap).(p - py) = (p + 1).(pm - pby)$$

Die wirkliche Multiplikation giebt

$$p.(c + ap) - p.(c + ap)\,y = (p + 1)\,pm - p.(p + 1)\,by$$

also

$$c + ap - (c + ap)\,y - (p + 1)\,m + (p + 1)\,by = 0$$

oder

$$(b(p + 1) - (c + ap)).y - (p + 1).m + c + ap = 0$$

daher

$$y + \frac{c + ap - (p + 1).m}{(p + 1).b - (c + ap)} = 0$$

und

$$12)\quad y = \frac{c + ap - (p + 1).m}{c + ap - (p + 1).m}$$

Ist y hiernach gefunden, so hat man aus (10) auch x, und aus (4) z.

Anm. Wenn man mit den arithmetischen Axiomen, worauf diese Umformungen der nach einander folgenden Gleichungen beruhen, hinlänglich bekannt und sich derselben während dem Kalkul immer bewußt ist, so bleibt das Niederschreiben der nach einander folgenden Gleichungen eigentlich nur noch ein bloßer Mechanismus, und nach einiger Uebung bringt man es bald dahin, daß man nicht alle Zwischengleichungen, wie es hier geschehen ist; niederzuschreiben nöthig hat, um zum Werthe der unbekannten Größe zu gelangen.

Außerdem verdienen die Formeln oft noch besonders erwogen zu werden, und Anfänger, denen es Ernst um Mathematik ist, thun sehr wohl, wenn sie am Ende eines Kalkuls über den wahren Zusammenhang der gefundenen Haupt-

gleichung mit der Natur der Sache, von welcher die Rede ist, noch eine nähere Betrachtung anstellen, besonders über die Bedingungen der Möglichkeit, einer Aufgabe Genüge zu thun. Hierzu giebt uns das letzte Beispiel einige Gelegenheit, die ich daher hier noch benutzen will, einige Bemerkungen beizufügen, welche die Hauptformel (No. 12.) betreffen.

y ist hier eine Größe, welche wirklich genommen werden soll, und zwar eine benamte Größe, eine Quantität von Wein, die nicht verneint gedacht werden kann, weil der Begriff von Wein keinen entgegengesetzten zuläßt.

Zwar ist dem Begriffe des Hinzuthuns der des Wegnehmens entgegengesetzt; aber das Wegnehmen einer Quantität Weins von der Sorte B ist hier nicht gestattet, weil bei dem Akt der Mischung nichts vorhanden ist, wovon eine solche Quantität weggenommen werden könnte.

Soll also der Forderung der Aufgabe Genüge geschehen können, so darf der Werth von y nicht verneint werden; also müssen 1) Zähler und Nenner im Werthe von y beide zugleich entweder bejaht oder verneint seyn.

Ist also $(p + 1).m$ größer oder kleiner als $c + ap$, so muß auch $(p + 1).b$ größer oder kleiner als $c + ap$ seyn. Es muß 2) y nothwendig ein eigentlicher Bruch seyn, nämlich Theil einer Maaß. Hieraus folgt α) wenn Zähler und Nenner bejaht sind, so muß die Größe, welche von $c + ap$ im Zähler abgezogen wird, größer seyn, als die welche von $c + ap$ im Nenner abgezogen wird. Es wird also erfordert, daß $(p + 1).m > (p + 1).b$, oder daß $m > b$ sey. β) Wenn Zähler und Nenner verneint sind, so muß $(p + 1).m$ sowohl als $(p + 1).b$ die Quantität $c + ap$ übertreffen, aber der Ausdruck $(p + 1).m$ mehr als der $(p + 1).b$, damit der Werth von y ein

eigentlicher Bruch werde; es muß also in diesem Falle $(p + 1).m < (p + 1).b$, oder $m < b$ seyn.

Es sey z. B. $a = 48$, $b = 66$, $c = 84$; man will von der Sorte A 3mal soviel nehmen als von der C, und verlangt eine Mittelsorte D, welche 1 fl. oder 60 kr. kosten soll, so hat man noch $m = 60$ und $p = 3$; also

$$y = \frac{3 \cdot 48 + 84 - 4 \cdot 60}{3 \cdot 38 + 84 - 4 \cdot 66} = \frac{-12}{-36} = \frac{1}{3};$$

Daher

$$x = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2};$$

und

$$z = 1 - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{6}$$

Verlangte man aber eine Mittelsorte zu 72 kr., so würden Zähler und Nenner verneint, da dann $m < b$ seyn müßte; da aber $72 > 66$ ist, so wäre in diesem Falle keine Auflösung möglich, wie auch die wirkliche Berechnung ergiebt. Man fände nämlich

$$y = \frac{3 \cdot 48 + 84 - 4 \cdot 72}{3 \cdot 48 + 84 - 4 \cdot 66} = \frac{-60}{-36} = \frac{5}{3}.$$

also $y > 1$, welches unmöglich ist.

Für unbenamte Größen oder absolute Zahlen kann der Aufgabe, die sich in den 3 Gleichungen zwischen x, y und z aussprechen, allemal Genüge geschehen. Man fände für diesen Fall

$$x = \frac{3 - 5}{4} = -\tfrac{1}{2} \text{ und } z = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{1}{6};$$

Jetzt wäre

$$x + y + z = \tfrac{5}{3} + (-\tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{6}) = 1$$

wie sich gehört.

6. Ex. Es hat Jemand um einen bestimmten Preis 3 Lieferungen von Korn, Gerste und Hafer erhalten

zuerst 16 Malter Korn
25 —— Gerste
30 —— Hafer
} für die Summe von 302 fl.

Dann

25 —— Korn
10 —— Gerste
20 —— Hafer
} für 275 fl.

zuletzt

24 —— Korn
18 —— Gerste
36 —— Hafer
} für 348 fl.

Wie hoch ist das Malter von jeder dieser Früchte insbesondere bezahlt worden?

Der Preis von 1 Malter Korn sey k Gulden
1 —— Gerste — g —
1 —— Hafer — h —

so ist

1) $16 . k + 25 . g + 30 . h = 302$
2) $25 . k + 10 . g + 20 . h = 275$
3) $24 . k + 18 . g + 36 . h = 348$

Aus diesen 3 Gleichungen folgt

4) $k = \frac{302 - 25 . g - 30 . h}{16}$

5) $k = \frac{275 - 10 . g - 20 . h}{25}$

6) $k = \frac{348 - 18 . g - 36 . h}{24}$

Aus (4 und 5) wird

$$\frac{302 - 25\,g - 30\,h}{16} = \frac{275 - 10\,g - 20\,h}{25}$$

Verfährt man, wie in vorigen Beispielen, so findet man

$$7)\ g = \frac{3150 - 430 \cdot h}{465}$$

Aus (5 und 6) wird

$$8)\ g = \frac{2100 - 420 \cdot h}{210}$$

Demnach aus (7 und 8).

$$661500 - 90300 \cdot h = 976500 - 195300 \cdot h$$

und hieraus

$$9)\ h = \frac{315}{105} = 3$$

Folglich aus (8)

$$10)\ g = \frac{2100 - 1260}{210} = \frac{84}{21} = 4$$

und nun aus (4)

$$11)\ k = \frac{302 - 100 - 90}{16} = \frac{112}{16} = 7$$

Es ist also

das Malter Korn mit 7 fl.
— — Gerste — 4 —
— — Hafer — 3 —

bezahlt worden.

7. Ex. Man soll Gerste, Hafer, Korn, Waitzen und Wein einkaufen. Hierzu ist eine Summe von A Reichsthalern bestimmt. Die Preise sind gegeben, nämlich

Für das Malter Gerste g Rthlr.
— — — Hafer h —
— — — Korn k —
— — — Waitzen w —
Für den Eimer Wein W —

An Hafer verlangt man ebensoviel als von den übrigen 3 Getraidearten zusammengenommen. Für den Roggen sollen α Rthlr. mehr, und für den Waitzen β Rthlr. mehr als für

die Gerste aufgewendet werden. Die Ausgabe für den Wein soll ebensoviel betragen als für den Hafer.

Aufl. Es sey die Malterzahl der Gerste $= u$
des Hafers $= v$
des Korns $= x$
des Waitzens $= y$
die Eimerzahl des Weines $= z$

so ist die Ausgabe
für die Gerste $= u \cdot g$
— den Hafer $= (u + x + y) \cdot h = v \cdot h$
— das Korn $= ug + \alpha = x \cdot k$
— den Waitzen $= ug + \beta = y \cdot w$
— den Wein $= (u + x + y) \cdot h = z \cdot W$

Hiernach hat man also

$$ug + vh + x \cdot k + y \cdot w + zW = A$$

Diese Bestimmungen geben

1) $u = v - x - y$

2) $u = \frac{kx - \alpha}{g}$

3) $u = \frac{wy - \beta}{g}$

4) $u = \frac{Wz}{h} - x - y$

5) $u = \frac{A - hv - kx - wy - Wz}{g}$

Aus (1 und 2) wird

$$v - x - y = \frac{k - \alpha}{g}$$

also

$$1^*) \quad x = \frac{gv - gy + \alpha}{k + g}$$

Aus (2 und 3) $\frac{kx - \alpha}{g} = \frac{wy - \beta}{g}$

also,

$$2^*)\ x = \frac{wy - \beta + \alpha}{k}$$

Aus (3 und 4) $\frac{wy - \beta}{g} = \frac{Wz}{h} - x - y$

Daher

$$x = \frac{\beta - wy}{g} + \frac{Wz}{h} - y$$

oder

$$3^*)\ x = \frac{\beta h - hwy + Wgz - ghy}{gh}$$

Aus (4 und 5)

$$\frac{Wz}{h} - x - y = \frac{A - hv - kx - wy - Wz}{g}$$

Daher

$$4^*)\ x = \frac{ghy - gWz + Ah - h^2v - hwy - hWz}{hk - gh}$$

Diese 4 Gleichungen für x geben wieder 3 Gleichungen für y. Nämlich

Aus (1* und 2*)

$$\frac{gv - gy + \alpha}{k + g} = \frac{wy - \beta + \alpha}{k}$$

Daher

$$1^{**})\ y = \frac{kgv + k\beta - g\alpha + g\beta}{w.(k + g) + kg}$$

Aus (2* und 3*)

$$\frac{wy - \beta + \alpha}{k} = \frac{\beta h - hwy + Wgz - ghy}{gh}$$

Daher

$$2^{**})\ y = \frac{\beta hk + kWgz - (\alpha - \beta).gh}{(w + k).gh + khw}$$

Dieser Nenner ist der in 1**, nur mit h multiplicirt.

Aus (3* und 4*) findet man

$$3^{**})\ y = \frac{(k-g).\beta h + (k-g)\,Wgz + g^2 Wz - Agh + gh^2 v + ghWz}{g^2 h - ghw + (k-g)\,hw + (k-g)\,gh}$$

Zur Abkürzung wollen wir den Nenner in 1** mit N, den in 2** mit B, und den in 3** mit C bezeichnen, wo dann $C = kh\,(w+g) - 2ghw$ ist, so erhält man aufs Neue

Aus (1** und 2**)

$$1^{***})\ v = \frac{N\,(\beta hk - (\alpha-\beta).\,gh) + NkWgz + B\,(g\alpha - k\beta - g\beta)}{Bkg}$$

Aus (2** und 3**)

$$\frac{\beta hk + kWgz - (\alpha-\beta)\,gh}{B} =$$

$$\frac{(k-g).\,\beta h + (k-g).\,Wgz + g^2 Wz - Agh + gh^2 v + ghWz}{C}$$

Es sey nun $(k-g).\,\beta h - Agh = D$, so wird

$$2^{***})\ v = \frac{C.\,(\beta hk - (\alpha-\beta).\,gh) + (Ck - B.\,(k+h)).\,Wgz - BD}{Bgh^2}$$

Setzt man nun in 1***

$$N\,(\beta hk - (\alpha-\beta)\,gh + B\,(g\alpha - (k+g).\,\beta) = E.$$

und in 2^{***}

$$Ch.(\beta k - (\alpha - \beta).g) - BD = F$$

so wird aus 1^{***} und 2^{***}

$$\frac{E + NkWgz}{Bkg} = \frac{F + (Ck - B(k + h)).Wgz}{Bgh^2}$$

und hieraus

$$z = \frac{Fk - Eh^2}{(Nh^2 - Ch + B(k + h)).Wkg}$$

Anwendung in Zahlen.

Es sey in Reichsthalern $g = 3$; $h = 2$; $k = 3{,}5$; $w = 4$; $W = 30$; $\alpha = 2000$; $\beta = 400$ und $A = 24613$, so wird

$N = 4 . 6{,}5 + 10{,}5 = 36{,}5$

$B = 2N = 72.$

$C = 9 . 2 - 3 . 2 . 4 + 0{,}5 . 2 . 4 + 0{,}5 . 3 . 2 = 1$

$D = 0{,}5 . 400 . 2 - 24613 . 3 . 2 = -147278$

$E = \left\{ \begin{array}{l} 36{,}5 . (400 . 2 . 3{,}5 - 1600 . 3 . 2) \\ + 73 . (3 . 2000 - 6{,}5 . 400) \end{array} \right\} = 0$

$F = 2 . (400 . 3{,}5 - 1600 . 3) + 73 . 147278$

$= 10745494$

Daher

$$z = \frac{3{,}5 . 10745494}{(36{,}5 . 4 - 3{,}5 + 73 . 5{,}5) . 30 . 3{,}5 . 3}$$

$= 219{,}47$ Einer

Geht man nunmehr rückwärts, so findet man aus 1^{***}

$$v = \frac{E + NhWgz}{Bkg} = \frac{36{,}5 . 30 . 219{,}47}{73}$$

$= 3292{,}05$ Malter Hafer.

Nunmehr aus 1^{**}

$$y = \frac{k . (gv + \beta) - (\alpha - \beta) . g}{N}$$

$$= \frac{3{,}5 \cdot 3 \cdot (3292{,}05 + 400) - 1600 \cdot 3}{36{,}5}$$

$= 853{,}88$ Malter Waitzen

Jetzt aus I *

$$x = \frac{3 \cdot 3292{,}05 - 3 \cdot 853{,}88 + 2000}{3{,}5 + 3}$$

$= 1433{,}00$ Malter Korn

Endlich aus (I)

$u = 3292{,}05 - (1433 + 853{,}88)$

$= 1005{,}17$ Malter Gerste

Die gesammten Kosten betragen hiernach

Für den Wein	219,47 · 30	=	6584,10	Rthlr.
— — Hafer	3292,05 · 2	=	6584,10	—
— — Waitzen	853,88 · 4	=	3415,52	—
— — Korn	1433 · 3,5	=	5015,50	—
— — Gerste	1005,17 · 3	=	3015,51	—
		=	24614,73	Rthlr.

Läßt man im Summiren die 5 Decimalbrüche weg, so erhält man genau die zur gesammten Ausgabe bestimmte Summe von 24613 Rthlr.

8. Ex. Es soll ein Kapital von mehreren hunderttausend Gulden aufgenommen werden. Hierzu werden

1) $\frac{1}{4}$ an Staatsobligationen, die man zu 70 p. C. einkaufen kann, für voll angenommen.

2) Ebenso $\frac{1}{3}$ an andern Staatsobligationen, die man zu 90 p. C. einkaufen kann.

Ich besitze baare 2000 fl. die ich zu diesem Darlehn mittelst Ankaufung von Staatsobligationen so verwenden mögte, daß ich den größten Vortheil daraus ziehe. Wieviel muß ich an Staatsobligationen No. 1., und wieviel an dergleichen No. 2. einkaufen, und wieviel also zur baaren Geldzahlung zurückhalten?

Was ich an baarem Gelde zu diesem
Darlehn bezahle, sey . . . . = x fl.
Von Oblig. No. 1. kaufe ich für . = y —
——— No. 2. . . . . = z —

Hiernach wird

$$x = 2000 - (y + z)$$

$$\frac{100}{70} y = \frac{x + \frac{100}{70} y + \frac{100}{90} z}{4}$$

$$\frac{100}{90} z = \frac{x + \frac{100}{70} y + \frac{100}{90} z}{3}$$

Also

$$1)\ x = 2000 - y - z$$

$$2)\ x = \frac{40}{7} y - \frac{10}{7} y - \frac{10}{9} z$$

$$3)\ x = \frac{30}{9} z - \frac{10}{7} y - \frac{10}{9} z$$

Aus (1 und 2) wird

$$4)\ 2000 - y - z = \frac{30}{7} y - \frac{10}{9} z$$

Aus (2 und 3).

$$5)\ \frac{30}{7} y - \frac{10}{9} z = \frac{20}{9} z - \frac{10}{7} y$$

Demnach aus (4)

$$2000 + \frac{1}{9} z = \frac{37}{7} y$$

und

$$6)\ z = \frac{333}{7} \cdot y - 18000$$

Aus (5)

$$\frac{30}{9} \cdot z = \frac{40}{7} \cdot y$$

also

$$7)\quad z = \frac{36}{21} \cdot y$$

Daher aus (6 und 7)

$$\frac{333}{7} \cdot y - 18000 = \frac{12}{7} \cdot y$$

woraus wir

$$y = 392{,}523 \text{ fl.}$$

finden. Und nun aus (7)

$$z = \frac{12}{7} \cdot 392{,}523 = 672{,}896 \text{ fl.}$$

Also

$$x = 2000 - (y + z) = 934{,}581$$

Ich verwende also von meinen vorräthigen 2000 fl.

$y = 392{,}523$ fl. für Oblig. No. 1.
$z = 672{,}896$ — für Oblig. No. 2.
$x = 934{,}581$ — baar

Hiermit leiste ich einen Vorschuß

$$= \frac{10}{7} \cdot 392{,}523 + \frac{10}{9} \cdot 672{,}896 + 934{,}581$$
$$= 560{,}746 + 747{,}662 + 934{,}581$$
$$= 2242{,}989 \text{ fl.}$$

Anm. In der Ausübung kann in unzähligen Fällen die Genauigkeit der theoretischen Resultate nicht befolgt werden, welches auch hier der Fall ist. Man muß die Obligationen einkaufen, wie man sie haben kann. Man wird sich nämlich bemühen müssen, Obligationen No. 1. und No. 2. zu erhalten, die so wenig als es geschehen kann, unter 560 und 747 fl. fallen. Könnte man nun von Obligationen No. 1. welche erhalten, die zusammen 550 fl. betragen, und von No. 2, welche zusammen 700 fl. ausmachen, so hätte man

für 550 fl. zu zahlen $\frac{7}{10} \cdot 550 = 385$ fl.

— 700 — ..... $\frac{9}{10} \cdot 700 = 630$ —

1015 fl.

Es blieben mir also von meinen 2000 fl. noch übrig 2000 — 1015 = 975 fl.

Werden nun die Kapitalien nur von 50 zu 50 angenommen, so müßte man entweder noch 25 fl. zu erhalten suchen, oder nur 950 fl. baar zuschiessen. In diesem letzteren Falle hätte unser ganzes Darlehn den Werth von 550 + 700 + 950 = 2200 fl. und dieses hätten wir mit 385 + 630 + 950 = 1965 fl. bestritten, so daß wir noch 35 fl. übrig hätten.

9. Ex. Eine interessante Frage wäre folgende: Man läßt Hafer durch Fuhrwerke transportiren; dabei wird täglich zum Füttern der vorgespannten Pferde eine gewisse Quantität bestimmt: man fragt, wieviel am Orte der Bestimmung, dessen Entfernung gegeben ist, ankommen werde?

Um den Transport auf die vortheilhafteste Weise zu besorgen, muß man das sämmtliche Bedürfniß für alle Wägen jedesmal von einem einzigen Fuhrwerk nehmen, um solches sobald es leer ist, sogleich wieder zurück schicken zu können, damit auf solche Weise die Anzahl der Pferde immer mehr vermindert werde. Dabei darf nun nicht außer Acht gelassen werden, daß für die rückkehrende Pferde gleichfals das zureichende Futter an Hafer der festgesetzten Bestimmung gemäß mitgegeben werden muß.

Ich fange nun mit der Voraussetzung an, daß am pten Tage von den anfänglichen N Pferden nur noch x Pferde übrig seyen, welche den Ueberrest des Hafers an diesem Tage weiter transportiren müssen.

Jedes Pferd soll täglich b Scheffel Hafer erhalten, so daß b einen Bruch bezeichnet; sämmtliche N Pferde sollen die ihren Kräften angemessene Quantität von S Scheffel Hafer fortbringen.

Kommen nun am pten Abende x Pferde an, so haben solche an diesem Tage x . b Scheffel Hafer verzehrt, und es könnten also am p + 1ten Tage Morgens $\frac{x \cdot b}{S} \cdot N$ Pferde zurückgeschickt werden.

Diese brauchen aber auf dem Rückwege, womit sie p Täge zubringen,

$$\frac{x \cdot b}{S} \cdot N \cdot pb = \frac{N \cdot b^2 px}{S} \text{ Scheffel}$$

wodurch der weitere Transport aufs Neue erleichtert wird.

Es können nämlich wegen dieses Abganges aufs Neue $\frac{\left(\frac{N \cdot b^2 \cdot px}{S}\right)}{s}$ Pferde zurückgehen, wenn jedes Pferd 5 Scheffel zieht; es ist aber $s = \frac{S}{s}$, also diese letztere Anzahl von Pferden

$$= \frac{N \cdot b^2 \cdot px}{S \cdot \frac{S}{N}} = \frac{N^2 b^2 px}{S^2}$$

Hiernach könnten also am p + 1ten Morgen

$$\frac{xb}{S} \cdot N + \frac{xN^2 b^2 p}{S^2} = \frac{bxN}{S} \cdot \left(1 + \frac{bpN}{S}\right)$$

Pferde zurückgehen. Und diese nehmen

$$\frac{bxN}{S} \cdot \left(1 + \frac{bpN}{S}\right) \cdot bp \text{ Scheffel}$$

oder

$$\frac{p\,b^2\,N}{S}\cdot\left(1+\frac{b\,p\,N}{S}\right).\,x\text{ Scheffel}=y$$

mit auf den Rückweg.

Die am $p+1$ten Morgen zurückbleibende Anzahl von Pferden ist noch

$$x-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{bpN}{S}\right).x$$

$$=\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{bpN}{S}\right)\right).x=z\quad(\text{h}$$

Setzt man $p=1$ und $x=N$, so erhält man für den $p+1$ten oder 2ten Abend die Anzahl der noch vorhandenen Pferde

$$=\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{bN}{S}\right)\right).N$$

Setzt man jetzt 2 statt p, und $\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{bN}{S}\right)\right).N$ statt x in (h), so ist der Pferderest am 3ten ($p+1$ten) Abende

$$=\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{b.2.N}{S}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{bN}{S}\right)\right).N$$

jetzt wieder $=x$

und am 4ten Abende der Pferderest

$$=\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{3bN}{S}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{2bN}{S}\right)\right)$$

$$\times\left(1-\frac{bN}{S}\cdot\left(1+\frac{bN}{S}\right)\right)$$

Zur Abkürzung sey $\frac{bN}{S}=\alpha$, so hat man am rten Abende noch

$$(1-\alpha.(1+(r-1)\,\alpha))\cdot(1-\alpha.(1+(r-2).\alpha))\times$$
$$(1-\alpha.(1+(r-3).\alpha))\cdots\cdots(1-\alpha.(1+\alpha)).N\quad($$

Hat man nun gleich anfangs den N Pferden S Scheffel zur Ladung gegeben, so hat man am rten Abende noch

$$(1-\alpha.(1+(r-1)\alpha))\cdot(1-\alpha.(1+(r-2)\alpha)) \cdots\cdots \times(1-\alpha.(1+\alpha)).S \quad (\odot$$

Scheffel übrig.

In Zahlen. Es sey $\alpha = 0{,}01$; so hat man am 20sten Tage noch an Pferden

$$(1-0{,}01.(1+0{,}19))\cdot(1-0{,}01.(1+0{,}18))$$
$$\times(1-0{,}01.(1+0{,}17))\cdots\times(1-0{,}01.(1+0{,}01))\,N$$
$$=(1-0{,}0119).(1-0{,}0118).(1-0{,}0117\ldots.(1-0{,}0101).N$$
$$= 0{,}9881 \cdot 0{,}9882 \cdot 0{,}9883 \cdot\cdots\cdot 0{,}9899 \cdot N$$

Die Logarithmen der 19 mit N multiplicirten Faktoren ist $= 75{,}8947282 - 76$. Die zugehörige Zahl ist 0,7847. Also der Pferderest am 20sten Abende $= 0{,}7847 \cdot N$, und der Haferrest $= 0{,}7847 \cdot S$.

1. Anm. Eigentlich müßte die Zahl in (⊙) noch aufs Neue vermindert werden, weil wegen der letzten Haferabgabe auch wieder einige Pferde weiter zurückgeschickt werden müßten. Werden also diese noch (⊙) beibehalten, so hat jedes der nach (⊙) übrig bleibenden Pferde etwas weniger als $\frac{S}{N}$ oder s Scheffel zu ziehen, und indem nun C richtig bleibt, wird (⊙) etwas zu groß. Dieses Plus ist aber unbedeutend.

2. Anm. Am $r+1$ten Morgen werden nun alle noch übrige Pferde x zurückgeschickt. Jedes erhält täglich b Scheffel, also auf r Täge r . b Scheffel, und sämmtliche x Pferde x . r . b Scheffel.

In vorstehenden Er, beträgt dieses

$$0{,}7847 \cdot N \cdot 20 \cdot b$$

oder, wenn $b = 0,1$ wäre,

$$1,5694 \cdot N$$

Ist also

$$S = 10 \cdot N \text{ oder } N = 0,1 \cdot S$$

so bleibt am Ende noch übrig

$$1,5694 \cdot 0,1 \cdot S = 0,1569 \cdot S$$

3. Anm. Ich habe schon oben erwähnt, daß in der Aufgabe selbst nicht allemal soviele Bestimmungsstücke enthalten sind, als man haben muß, um soviele Gleichungen zu bilden, als man unbekannte Größen hat, wo aber die noch fehlenden Stücke durch Kenntnisse, die wir anders woher genommen haben, ergänzt werden können. Ich will nur zwei Beispiele der Art hier beifügen.

10. Ex. Auf meiner Taschenuhr steht der Minutenzeiger auf der 15ten Minute, der Stundenzeiger auf $31\frac{1}{4}$ Minute. An welcher Stelle wird ersterer gerade über letzteren zu stehen kommen?

Wir setzen den Weg, welchen der Stundenzeiger noch zurücklegen muß, bis er vom Minutenzeiger eingeholt wird, $= x$ Minuten, den des Minutenzeigers $= y$ Minuten, so hat man, weil der Stundenzeiger $16\frac{1}{4}$ Minute voraus ist,

$$1) \quad y = 16\tfrac{1}{4} + x \text{ Minuten}$$

Diese unbestimmte Gleichung ist die einzige, welche aus der Aufgabe abgeleitet werden kann. Es fehlt also noch eine Bestimmung, welche uns eine zweite Gleichung zwischen x und y gäbe. Diese muß der Rechner selbst zu ergänzen wissen. Die allgemein bekannte Einrichtung der Taschenuhren hat nämlich zur Folge, daß der Minutenzeiger 12mal so schnell fortrückt als der Stundenzeiger; dieses giebt

$$2) \quad y = 12\,x$$

Also nunmehr

$$12x = 16\frac{1}{4} + x, \text{ und } 11 . x = 16,25$$

also

$$x = 1,477 \text{ Minuten.}$$

Folglich steht der Minutenzeiger bei 31,25 + 1,477 oder 32,727 Minuten über dem Stundenzeiger.

II. Ex. ab, cd, fe (Fig. 1.) seyen 3 Parallelen, in welcher sich 3 Körper a, c, e bewegen. Alle 3 Körper fangen ihre Bewegung gleichzeitig an:

der a von a aus nach b durchlauft in jeder Sekunde c Fuß
c. von c aus nach d . . . . . C —
e von e aus nach f . . . . . v —

gh sey, senkrecht durch die 3 Parallelen, durch c gezogen, um hiernach die Stellen a und e genau zu bestimmen; es sey nämlich

$$ag = a; \quad cg = G$$
$$eh = e; \quad ch = H$$

Man soll aus den durch c, C und v gegebenen Geschwindigkeiten und den gegebenen Entfernungen a, e, G und H diejenigen Stellen bestimmen, in welchen die 3 Körper bei der angenommenen Bewegung in eine einzige gerade Linie zu stehen kommen, oder mit andern Worten: man soll die gerade MN angeben, in welcher alle 3 Körper zugleich ankommen.

Aufl. 1. Die unbekannte Größe ist eigentlich die Linie MN, sowohl in ihrer Lage gegen die 3 Parallelen, als in ihrer Lage gegen die 3 Körper. Die Aufgabe scheint beim ersten Anblick von den bisherigen darin wesentlich verschieden zu seyn, daß es darin nicht auf die Bestimmung einer Quantität überhaupt, oder einer Zahl abgesehen ist, sondern auf die einer Linie, und zwar auf die Lage dieser Linie, also auf eine Qualität. Die Mathematik hat es aber überall nur mit Quantitäten zu thun, auch wo

Qualitäten vorzukommen scheinen. Soll nämlich die Frage arithmetisch behandelt werden können, so müssen die darin vorkommenden Qualitäten von der Art seyn, daß sie von bloßen Quantitäten abhängen und durch solche allein ihre vollständige Bestimmung erhalten. Diese als Bestimmungsstücke in Rechnung kommende Quantitäten muß man nun aufsuchen, und ihre Abhängigkeit von einander aus einer anderen Doktrin bestimmen, wohin Gegenstände der Art gehören. Linien sind Gegenstände der Geometrie, die man also hier zu Hülfe nehmen muß.

Ist MN die gesuchte Linie, so wird solche offenbar durch die 3 Entfernungen aM, cq und eN vollständig bestimmt. Dieses sind also hier die 3 unbekannten Größen, welche mit Hülfe geometrischer Lehren bestimmt werden müssen. Wir setzen zu dem Ende in der Zeichnung

$$aM = x; \quad cq = x'; \quad eN = x''.$$

2) Um zu den erforderlichen Gleichungen zu gelangen, müssen wir eine Relation hierher gehöriger Linien ausdrucken, welche die Bedingung in sich schließt, daß NqN eine gerade Linie sey.

Zu dem Ende ziehe man die MO senkrecht auf ef, so hat man

$$Mp : pq = MO : NO$$

Setzt man $pq = y$ und $NO = z$, so hat man

$$Mp : y = MO : z$$

oder

$$!gc : y = gh : z$$

also

$$z = \frac{gh \cdot y}{gc} = \frac{(gc + ch) \cdot y}{gc} = \frac{(G \mp H) \cdot y}{G}$$

3) Nunmehr bestimmen wir eN oder x''. Nämlich

$$cN = eh - hN = eh - (gM - MO)$$
$$= eh - (aM - ag - NO)$$

oder

$$x'' = e - (x - a - z) = e - x + a + \frac{G + H}{G} \cdot y$$

4) Ferner

$$x \text{ oder } cq = cp - pq = gM - pq$$
$$= aM - ag - pq = x - a - y$$

5) Die in der Aufgabe angegebenen Verhältnisse der verschiedenen Geschwindigkeiten führen uns nun auf eine neue Gleichung für x'' und auf eine neue für x'; nämlich

$$x'' = \frac{v}{c} x; \text{ und } x' = \frac{C}{c} x$$

6) Man hat also aus Vergleichung mit No. 3.

$$\text{I. } \frac{v}{c} x = e - x + a + \frac{G + H}{G} \cdot y$$

$$\text{II. } \frac{C}{c} x = x - a - y$$

woraus sich x und y finden lassen.

7) Aus I folgt

$$y = \frac{G}{G + H} \cdot \left(\frac{v}{c} x - e + x - a\right)$$
$$= \frac{G}{G + H} \cdot \left(\frac{v + c}{c} x - c - a\right)$$

Aus II wird

$$y = x - a - \frac{C}{c} x = \frac{c - C}{c} x - a$$

Demnach

$$(G + H) \cdot (c - C) \cdot x - Gac - Hac = G \cdot (v + c) \cdot x$$
$$- Gce - Gca$$

und

$$(H \cdot (c - C) - G \cdot (C + v)) \cdot x = (Ha - Ge) \cdot e$$

Folglich

$$x = \frac{Ha - Ge}{H.(c - C) - G.(C + v)} . c$$

$$x' = \frac{C}{c} x = \frac{Ha - Ge}{H.(c - C) - G.(C + v)} . C$$

$$x'' = \frac{v}{c} x = \frac{Ha - Ge}{H.(c - C) - G.(C + v)} . v$$

Anm. Diese Beispiele mögen hier genügen, Anfänger werden sehr wohl thun, wenn sie die Auflösungen selbst versuchen, und nur die hier mitgetheilten im Nothfalle als Wegweiser benutzen. Wenigstens müssen sie, wenn sie solche auch ganz durchzugehen sich genöthigt sehen, nachher solche selbst vornehmen, und nicht eher weiter gehen, als bis sie ohne weitere Beihülfe alle vorstehende Rechnungen selbst anzusetzen und auszuführen im Stande sind. Eine ziemliche Anzahl von Beispielen findet man J. H. Ufflackers Exempelbuch für Anfänger und Liebhaber der Algebra 3te Aufl. Braunsch. 1804. Sie sind aber nach meiner Einsicht nicht gut gewählt.

Siebentes Kapitel.

Von der Auflösung solcher Aufgaben, welche auf Gleichungen vom zweiten Grade führen.

§. 61.

Alle gehörig geordnete quadratische Gleichungen sind unter der Form

$$\text{XVIII.} \quad x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

begriffen, wo α und β bejahte oder verneinte Werthe haben mögen.

§. 62.

Die Gleichung (XVIII) allgemein aufzulösen.

Aufl. 1.) Man mache das Quadrat von $x + m$, so wird

$$(x + m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$$

Also ist $x^2 + 2mx + m^2$ ein vollkommenes Quadrat einer zweitheiligen Größe $x + m$, und

$$\text{XIX.} \quad \sqrt{(x^2 + 2mx + m^2)} = x + m$$

2. Die Gleichung (XVIII) giebt $x^2 + \alpha x = -\beta$. Hier steht α statt $2m$ oder $\frac{1}{2}\alpha$ statt m. Um nun $x^2 + \alpha x$ gleichfalls in ein vollkommenes Quadrat zu verwandlen, darf man nur noch $(\frac{1}{2}\alpha)^2$ statt m^2 addiren; hiermit wird

$$x^2 + \alpha x + \tfrac{1}{4}\alpha^2 = -\alpha + \tfrac{1}{4}\alpha^2$$

wo der linke Theil der Gleichung, in welchem nur $\frac{1}{2}\alpha$ statt des vorigen m steht, das Quadrat von $x + \frac{1}{2}\alpha$ ist, also

$$x + \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{(-\beta + \tfrac{1}{4}\alpha^2)}$$

und

$$\text{XX.}\quad x = -\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{(-\beta + \tfrac{1}{4}\alpha^2)}$$

§. 63.

Weil die Quadratwurzel aus einer Zahl sowohl bejaht als verneint genommen werden kann, so hat man in jeder quadratischen Gleichung zwei Werthe der unbekannten Größe

$$1)\quad x = -\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{(-\beta + \tfrac{1}{4}\alpha^2)}$$

$$2)\quad x = -\tfrac{1}{2}\alpha - \sqrt{(-\beta + \tfrac{1}{4}\alpha^2)}$$

Weil aber Quadratwurzeln aus verneinten Größen unmöglich sind, so werden beide Werthe der unbekannten Größe zugleich unmöglich, wenn $\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta$ verneint oder $\frac{1}{4}\alpha^2 < \beta$ ist.

Ob übrigens das bejahte oder das verneinte Zeichen vor dem Wurzelzeichen gebraucht werden müsse, müssen die Bedingungen der Aufgabe entscheiden. Wo diese nicht entscheiden, gilt eines wie das andere.

§. 64.

Nur einige Beispiele.

1. Ex. Man sey auf die Gleichung

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

(wo 3 statt α steht, $1{,}5 = \frac{1}{2}\alpha$ ist und $2{,}25 = \frac{1}{4}\alpha^2$ ist); also

$$x^2 + 3x + 2{,}25 = 40 + 2{,}25$$

Die Größe zur Linken ist das Quadrat von $x + 1{,}5$; also

$$x + 1{,}5 = \sqrt{42{,}25}$$

und

$$x = -1{,}5 + \sqrt{42{,}25}$$

Es ist aber $\sqrt{42,25} = \pm 6,5$; also

1) $x = -1,5 + 6,5 = 5$

2) $x = -1,5 - 6,5 = -8$

Wäre es nun blos darum zu thun, eine Zahl zu finden, welche 3mal genommen zu ihrem Quadrate addirt 40 gäbe, so thut ein Werth wie der andere der Aufgabe Genüge.

Probe.	$5^2 = 25$	$(-8)^2 = 64$
	$3 \cdot 5 = 15$	$3 \cdot (-8) = -24$
	$x^2 + 3x = 40$	$x^2 + 3x = 40$

2. Ex. Es sey $x^2 + 6x + 20 = 0$; so ist 3 die Hälfte von 6, und $3^2 = 9$; daher

$$x^2 + 6x + 9 = -20 + 9 = -11$$

$$x + 3 = \sqrt{-11}$$

also 1) $x = -3 + \sqrt{-11}$; 2) $x = -3 - \sqrt{-11}$

Beide Werthe von x sind unmöglich; aber als arithmetische Ausdrücke thun sie beide der vorgegebenen Gleichung Genüge.

Probe	$-3 + \sqrt{-11}$	$-3 - \sqrt{-11}$
	$x - 3 + \sqrt{-11}$	$x - 3 - \sqrt{-11}$
	$x^2 = 9 - 6\sqrt{-11} - 11$	$x^2 = 9 + 6\sqrt{-11} - 11$
	$6x = -18 + 6.\sqrt{-11}$	$6x = -18 - 6\sqrt{-11}$
	$x^2 + 6x = 9 - 29 = -20$	$x^2 + 6x = 9 - 29 = -20$

also in beiden Fällen

$$x^2 + 6x + 20 = 0$$

Ueberhaupt muß man bemerken, daß die durch richtige Entwickelung herauskommenden arithmetische Ausdrücke, wenn sie gleich unmögliche Werthe geben, doch allemal diejenige Form haben, unter welcher sie nach gehöriger Substitution der Forderung, auf die sie sich beziehen, Genüge thun.

3. Ex. Ein Rektangel, dessen Grundlinie $= 7'$, und Höhe $= 5'$ ist, soll so vergrössert werden, daß es 100 Quadrat-Fuß hält; dabei soll aber die Vergrösserung der Grundlinie 3mal soviel betragen als die der Höhe.

Die Vergrösserung der Grundlinie sey in Fussen $= x$, also in der Höhe $= \frac{1}{3} x$, so ist

Grundlinie des neuen Rektangels $= 7 + x$
Höhe — — — $= 5 + \frac{1}{3} x$

also

$$(7 + x) \cdot (5 + \tfrac{1}{3} x) = 100$$

oder

$$35 + \tfrac{7}{3} x + 5x + \tfrac{1}{3} x^2 = 100$$

und

$$x^2 + 22x = 300 - 105 = 195$$

Demnach

$$x^2 + 22 \cdot x + 121 = 316 \quad (h)$$

$$x + 11 = \sqrt{316}$$

also

1) $x = -11 + \sqrt{316} = -11 + 17{,}77$ Fuß
$= -6{,}77$ Fuß;

2) $x = -11 - \sqrt{316} = -28{,}66$ Fuß.

In Rücksicht auf blos arithmetisches Verhalten thun beide Werthe von x der Gleichung (h) Genüge; aber für die Konstruktion eines Rektangels kann der verneinte Werth nicht gebraucht werden. Der bejahte giebt

Grundlinje des neuen Rektangels $= 7 + 6{,}776'$
$= 13{,}776'$

Höhe . . . . . $= 5 + 2{,}259 = 7{,}259$

Beider Produkt ist 99,999984 also genau genug $= 100$.

4. Ex. Der Durchmesser eines Kreises sey $= 60'$ Auf diesem soll ein Perpendikel zu $20'$ hoch errichtet werden; man suche die Stelle wo das Perpendikel errichtet werden muß?

Das Perpendikel schneidet vom Durchmesser ein bestimmtes Stück ab; bezeichnen wir dieses mit x, so giebt uns die Geometrie die Proportion

$$x : 20 = 20 : (60 - x)$$

also

$$60 . x - x^2 = 400$$

oder

$$x^2 - 60 . x = - 400$$
$$x^2 - 60 . x + 900 = 500$$
$$x - 30 = \sqrt{500}$$
$$x = 30 + \sqrt{500}$$

also

1) $x = 30 + 22,36 = 52,36'$
2) $x = 30 - 22,36 = 7,64$

Hier sind, wie die Betrachtung des Kreises zeigt, beide Werthe genügend, und beide zusammen geben 60′ nämlich den ganzen Durchmesser.

Die allgemeine Auflösung giebt sich, indem wir die Höhe des Perpendikels mit h, und den Halbmesser mit r bezeichnen, durch die Proportion

$$x : h = h : (2r - x)$$
$$2rx - x^2 = h^2$$
$$x^2 - 2rx = - h^2$$
$$x^2 - 2rx + r^2 = r^2 - h^2$$
$$x - r = \sqrt{(r^2 - h^2)}$$
$$x = r \pm \sqrt{(r^2 - h^2)}$$

wo x unmöglich wird, wenn $h > r$ seyn sollte.

Achtes Kapitel.

Von der Auflösung kubischer Gleichungen.

§. 65.

Jede kubische Gleichung läßt sich durch

XXI. $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

ausdrucken.

Macht man $(x + a)^3$, so erhält man den vollkommenen kubischen Ausdruck $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$. Kommt daher eine kubische Gleichung von der Form vor

XXII. $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 0$

wo a einen bejahten oder verneinten Werth haben mag

so hat man

$$(x + a)^3 = 0$$

also $x = -a$

In numerischen Gleichungen könnte ein solcher Fall zufällig eintreten; weil aber die Form dabei nicht, wie bei Literalgleichungen, sogleich ins Auge fällt, so muß man solches durch Prüfung der Koëfficienten entdecken. Es sey z. B.

$$x^3 - 16,5 \cdot x^2 + 90,75 \cdot x - 166,375 = 0$$

Sollte dieser kubische Ausdruck $= (x + a)^3$ seyn, so wäre $a^3 = -166,375$, also $a = -5,5$; ferner $3a = -16,5$, also hie aus gleichfalls $a = -5,5$; endlich auch $90,75$

$= 3a^2$, also $a = \sqrt{\frac{90,75}{3}} = \sqrt{30,25} = \pm 5,5$.

Demnach ist hier der vorstehende kubische Ausdruck $= (x - 5,5)^3$, und

$$(x - 5,5)^3 = 0 \text{ oder } x = 5,5.$$

§. 66.

Eine kubische Gleichung von der Form (XXII) ist einerlei mit

$$(x + a) . (x + a) . (x + a) = 0$$

sie hat also 3 gleiche Wurzeln $x = -a$.

Der Charakter einer solchen Gleichung ist also,

1) daß $\frac{9\gamma}{\alpha} = \beta$ seyn muß,

oder $9\gamma = \alpha\beta$

2) daß $\frac{3\beta}{\alpha} = \alpha$ oder $3\beta = \alpha^2$ sey.

und dann ist $a = \sqrt[3]{\gamma}$, oder auch $a = \frac{1}{3}\alpha$.

In der numerischen Gleichung des vorigen §. ist

$$9\gamma = 1497,375$$
$$\alpha\beta = 1497,375$$
$$3\beta = 272,25$$
$$\alpha^2 = 272,25$$

Also finden die Bedingungen für 3 gleiche Wurzeln statt. Demnach ist, wenn a die Wurzel bezeichnet, $-166,375 = a^3$, und $a = \sqrt{-166,375} = -5,5$; oder auch

$$a = -\frac{16,5}{3} = -5,5.$$

§. 67.

Der Fall, wo α, β, γ (in XXI) das (§. 66.) angegebene Verhalten hätte, findet höchst selten statt. Eher kann eine kubische Gleichung unter nachstehender Form vorkommen:

XXIII. $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + b = 0$

wo a und b bejahte oder verneinte Werthe haben mögen.

Diese aufzulösen setzt man

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = a^3 - b$$

oder

$$(x + a)^3 = a^3 - b$$

$$x + a = \sqrt[3]{(a^3 - b)}$$

$$x = -a + \sqrt[3]{(a^3 - b)}$$

Soll die allgemeine Gleichung

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

die Form (XXIII) haben, so muß,

$$3\beta = \alpha^2 \text{ seyn;}$$

und nun wird $a = \frac{1}{3}\alpha$, und

XXIV. $x = -\frac{1}{3}\alpha + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\alpha^3 - \gamma\right)}$

Hätte man die numerische Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 12 . x + 56 = 0$$

so wäre $3\beta = 36$, $\alpha^2 = (-6)^2 = 36$, also $3\beta = \alpha^4$;

Daher $x = -\frac{-6}{3} + \sqrt[3]{\left(-\frac{216}{27} - 56\right)} = -2.$

§. 68.

Sollte eine kubische Gleichung 3 gleiche Wurzeln haben, die höchstens nur in den Zeichen von einander verschieden wären, so fänden nur folgende Fälle statt

A) $(x \pm a) . (x^2 + 2ax + a^2) = 0$

B) $(x \pm a) . (x^2 - a^2) = 0$

C) $(x \pm a) . (x^2 - 2ax + a^2) = 0$

Durch wirkliche Multiplikation erhält man 6 Gleichungen, von welchen aber, die identischen weggelassen, nur folgende 4 verschiedene Formen übrig bleiben

1) $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 0$
2) $x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 = 0$
3) $x^3 - ax^2 + a^2x + a^3 = 0$
4) $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$

Eine kubische Gleichung

$$x^3 + \alpha x^3 + \beta x + \gamma = 0$$

kann also nur in folgenden Fällen 3 der Quantität nach gleiche Wurzeln haben

1*) für $\gamma = (\frac{1}{3}\alpha)^3$ und zugleich $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \gamma$ oder $\frac{\beta}{\alpha}$
$= \frac{1}{3}\alpha$ (No. 1. und 4).

2*) für $\gamma = -x^3$ und zugleich $\alpha\beta = \gamma$ oder β
$= -\alpha^2$ (No. 2. und 3).

Die 3 Wurzeln sind in diesen Fällen

No. 1. $-a, -a, -a$ (wegen der 3 Folgen)
No. 2. $-a, -a, +a$ (wegen 2 Folg. u. 1 Abwechsl.)
No. 3. $-a, +a, +a$ (wegen 1 Folg. u. 1 Abwechsl.)
No. 4. $+a, +a, +a$ (wegen 3 Abwechslungen)

Die Quantität von a ist $\sqrt[3]{\gamma}$, das Zeichen bei Seite gesetzt. Oder auch: es ist die Quantität von a in No. 1. u. 4. $= \frac{1}{3}\alpha$; in No. 2. u. 3. $= \alpha$.

1. Ex. Es sey

$$x^3 - 21x^2 + 147 \cdot x - 343 = 0$$

Hier ist $\alpha = -21$, $\beta = 147$, $\gamma = -343$, und

$$-343 = -\left(\frac{21}{3}\right)^3 \left(\text{d. i. } \gamma = (\tfrac{1}{3}\alpha)^3\right)$$

$$\frac{147}{-21} = \tfrac{1}{3}\cdot(-21) \left(\text{d. i. } \frac{\beta}{\alpha} = \tfrac{1}{3}\alpha\right)$$

Die Gleichung gehört zu No. 4.; es ist also hier nach No. 1* die Wurzel a der Quantität nach $= \frac{1}{3}\alpha = 7$, und zwar bejaht; die Gleichung hat also die 3 Wurzeln

$+7, +7, +7$. Das Produkt $(x-7).(x-7).(x-7)$ giebt den obigen kubischen Ausdruck.

2. Ex. Es sey

$$x^3 - 14x^2 - 196x + 2744 = 0$$

Diese Form gehört zu No. 3.

Hier ist $\alpha = -14$; $\beta = -196$; $\gamma = 2744$ und (vorhin 2*) $2744 = 14^3$ (d. i. $\gamma = -\alpha^3$); $-196 = -14^2$ d. i. $\beta = -\alpha^2$.

Also hat die Gleichung drei gleiche Wurzeln, die Zeichen bei Seite gesetzt. Es ist nämlich die Quantität von $a = \alpha = 14$, und zwar nach der Angabe bei No. 3. die 3 Wurzeln

$$-14, +14, +14$$

das Produkt $(x+14).(x-14).(x-14)$ giebt den gegebenen kubischen Ausdruck.

§. 69.

Auch in Fällen, welche den Bestimmungen 1* und 2* nur nahe kommen, müssen die 3 Wurzeln doch allemal nahe zusammenfallen, und die vorstehenden Bestimmungen geben dann wenigstens Zahlen, die den Wurzeln nahe kommen.

Ex. Es sey $x^3 - 24{,}6.x^2 + 201{,}71.x - 551{,}286 = 0$.

Diese Gleichung gehört zu vorigem §. No. 4. Hier ist, die Zeichen bei Seite gesetzt, $\alpha = 24{,}6$; $\frac{1}{3}\alpha = 8{,}2$; $(\frac{1}{3}\alpha)^3 = 551{,}368$; $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{201{,}71}{24{,}6} = 8{,}2$ beinahe.

Die Gleichung hat also gewiß 3 nahe beisammenliegende Wurzeln, alle beinahe $= 8{,}2$; eine oder zwei könnten auch genau $= 8{,}2$ seyn. Die wirkliche Probe ergiebt, daß eine davon in völliger Schärfe $= 8{,}2$ ist. Hat man aber nur eine der 3 Wurzeln in hinlänglicher Genauigkeit, so ergeben sich die beiden andern leicht durch eine quadratische Gleichung

§. 70.

Es sey e eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

wo α, β, γ wie bisher bejahte oder verneinte Werthe haben mögen, man soll die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung finden.

Aufl. Aus §. 55. XVII. (nur e statt $-\phi$ gesetzt, und 3 statt m) wird

$$x^2 + (\alpha + e).x - \frac{\gamma}{e} = 0$$

also

$$\text{XXV.}\quad x = -\frac{\alpha + e}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\alpha + e}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{e}\right)}$$

welches die beiden anderen Werthe von x sind.

Ex. Eine Wurzel der Gleichung (§. 69.) ist $e = 8{,}2$; es ist überdas $\alpha = -24{,}6$; $\gamma = -551{,}286$; daher für die beiden andern Wurzeln

$$x = -\frac{-24{,}6 + 82}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{-24{,}6 + 8{,}2}{2}\right)^2 - \frac{551{,}286}{8{,}2}\right)}$$

$$= 8{,}2 \pm \sqrt{(67{,}24 - 67{,}23)} = 8{,}2 \pm 0{,}1$$

also

$$2)\ x = 8{,}1;\quad 3)\ x = 8{,}3.$$

§. 71.

Eine kubische Gleichung kann außer einer reellen Wurzel e noch zwei unmögliche haben. Dieses ist allemal der Fall, wann in (XXV) $\frac{\gamma}{e}$ verneint und größer als $\left(\frac{\alpha + e}{2}\right)^2$ ist. Wenn übrigens aber auch Wurzeln arithmetisch möglich sind, so können sie doch praktisch un-

möglich werden, so daß solche auf die Natur des Gegenstandes, auf den sich die Zahlen beziehen, nicht anwendbar sind. Beispiele der Art sind oben bei den quadratischen Gleichungen vorgekommen.

Ex. Es sey

$$x^3 + 10x^2 - 8x + 64 = 0$$

so ist eine Wurzel dieser Gleichung $= -11,223\ldots$. Hier ist $e = -11,223\ldots$; $\alpha = 10$, $\gamma = 64$; also $\frac{\gamma}{e} = -\frac{64}{11,223\ldots}$, und $\left(\frac{\alpha + e}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1,223\ldots}{2}\right)^2$ daher beide bejahte Wurzeln, welche wegen der 2 Abwechslungen vorhanden seyn sollten, unmöglich.

§. 72.

Jede Zahl hat ebendarum auch einen möglichen und zwei unmögliche Werthe zu Kubikwurzeln. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$\alpha = 0$ und $\beta = 0$, so erhält man die reine kubische Gleichung

$$x^3 + \gamma = 0, \text{ und } x = \sqrt[3]{-\gamma}$$

Dieses ist die mögliche Kubikwurzel aus x^3.

Die beiden unmöglichen geben sich aus XXV. Es sey nämlich $\sqrt[3]{-\gamma} = e$, oder $-\gamma = e^3$, so wird $\frac{\gamma}{e} = -\frac{e^3}{e} = -e^2$, und die beiden andern Werthe von x

$$= -\frac{\alpha + e}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\alpha + e}{2}\right)^2 - e^2\right)} \quad (\odot$$

oder, $\alpha = 0$ gesetzt,

$$= -\tfrac{1}{2}e \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}e^2 - e^2\right)}$$

$$\equiv \frac{-e \pm \sqrt{-3e^2}}{2} \equiv \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot e$$

z. B. $\sqrt[3]{8} \equiv 2$; außerdem $\equiv \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot 2$

$$\equiv -1 \pm \sqrt{-3}$$

$\sqrt[3]{27} \equiv 3$; außerdem $\equiv \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot 3$

$\sqrt[3]{1} \equiv 1$; außerdem $\equiv \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Probe.

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ \times\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline 1-2\sqrt{-3}-3 \\ \times\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline -1+2\sqrt{-3}+3 \\ \quad +\sqrt{-3}-2.(-3)-3\sqrt{-3} \\ \hline \equiv -1+3\sqrt{-3}-3-3.\sqrt{-3}+9 \end{array}$$

$\equiv 8$ wie sich gehört.

Auch findet man

$(x-2).(x-(-1+\sqrt{-3})).(x-(-1-\sqrt{-3}))$

$\equiv x^3-x^2-3x-x^2.\sqrt{-3}+2x\sqrt{-3}+2\sqrt{-3}-2$

$\quad +x^2+3x+x^2.\sqrt{-3}-2x\sqrt{-3}-2\sqrt{-3}-3.2$

$\equiv x^3-8 \equiv 0$ wie sich gehört.

Ebenso wird

$x-27 \equiv$

$(x-3).\left(x-\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.3\right).\left(x-\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.3\right)$

Dieses Produkt wird $\equiv 0$, sobald einer der 3 Faktoren $\equiv 0$ wird.

§. 73.

Aus jeder vollständigen kubischen Gleichung

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv 0$$

läßt sich nach (§. 54.) eine machen, in der das 2te Glied fehlt, wenn man $y - \frac{\alpha}{3}$ statt x setzt. Hiermit wird

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - \alpha y^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 y - \frac{1}{27}\alpha^3 \\ + \alpha x^2 & = & + \alpha y^2 - \frac{2}{3}\alpha^2 y + \frac{1}{9}\alpha^3 \\ + \beta x & = & + \beta y - \frac{1}{3}\alpha\beta \\ + \gamma & = & + \gamma \end{array}$$

$$= y^3 + (\beta - \tfrac{1}{3}\alpha^2).y + (\gamma + \frac{2}{27}\alpha^3 - \tfrac{1}{3}\alpha\beta) = 0$$

Da eine solche Reduktion allemal als geschehen angenommen werden kann, so läßt sich auch

XXVI. $x^3 + \beta x + \gamma = 0$

als allgemeine Form aller kubischen Gleichungen betrachten, wo nämlich $\alpha = 0$ wäre.

§. 74.

Sind m und n bejahte Größen, so hat eine kubische Gleichung von der Form

XXVII. $x^3 + mx + n = 0$

allemal 2 unmögliche Wurzeln.

Bew. Drei bejahte Größen können summirt nie die Null geben; es muß also eine mögliche Wurzel e nothwendig einen verneinten Werth haben. Die beiden andern Wurzeln mußten

$$= -\tfrac{1}{2}e \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}e^2 + \frac{n}{e}\right)}$$

seyn.

Weil nun e für sich verneint seyn soll, so wird $\frac{1}{4}e^2 + \frac{n}{e} < \frac{1}{4}e^2$, und $-\frac{1}{2}e$ bejaht, also $-\frac{1}{2}e - \sqrt{\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{n}{e}\right)}$ nothwendig bejaht, umsomehr muß aber auch $-\frac{1}{2}e +$

$\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{n}{e}\right)}$ bejaht seyn. Demnach wären die beiden anderen Werthe von x bejaht; aber bejahte Werthe von x finden nicht statt, also sind die beiden anderen Werthe von x unmöglich.

1. Anm. Wenn e die mögliche Wurzel ist, so giebt die allgemeine Gleichung für die beiden übrigen Wurzeln zu erkennen, daß diese entweder beide zugleich möglich oder unmöglich seyn müssen.

2. Anm. Der Satz von den Folgen und Abwechslungen der Zeichen in einer Gleichung läßt sich nur auf vollständige Gleichungen anwenden, wie $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Die obige Gleichung gestattet aber, weil $\alpha = 0$, zweierlei Ergänzung

1) $x^3 + 0 . x^2 + mx + n = 0$

2) $x^3 - 0 . x^2 + mx + n = 0$

Da aber im 2ten nur eine, im 1ten aber 3 verneinte Wurzeln statt hätten, so folgt auch hieraus schon die Einmischung unmöglicher Wurzeln.

§. 74.

Aus vorstehenden Betrachtungen giebt sich auch eine allgemeine Auflösung der kubischen Gleichungen. Hat man nämlich

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

so dürfen wir nur $x - \frac{1}{3}\alpha$ statt y setzen, um eine Gleichung von der Form

$$x^3 + mx + n = 0$$

zu erhalten (§. 73.), wo dann m und n bejaht oder verneint seyn mögen. Daraus wird nun $x = \sqrt[3]{(-mx - n)}$. Dafür setze man

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \quad (\mathfrak{C})$$

Jetzt sey

$$z^2 - pz + q = 0 \quad (\dagger)$$

eine quadratische Gleichung, welche die Größen A und B zu Wurzeln habe, so ist (§. 49). $A + B = p$, $A.B = q$. Aus $(\mathfrak{C})$ findet man

$$x^3 = (\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^3 = 3x.\sqrt[3]{AB} + A + B$$

wo nämlich zur Rechten x statt $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ steht. Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen $x^3 = -mx - n$, so wird

$$-m = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{q}; \quad -n = A + B = p$$

also

$$p = -n; \quad q = -\frac{m^3}{27}$$

Demnach aus $(\dagger)$

$$z^2 + nz - \frac{m^3}{27} = 0$$

und

$$z = -\tfrac{1}{2}n \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}\right)}$$

Man kann also

$$A = -\tfrac{1}{2}n + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}\right)}$$

$$B = -\tfrac{1}{2}n - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}\right)}$$

setzen. Demnach eine Wurzel der kubischen Gleichung aus $(\mathfrak{C})$

XXVIII.
$$\begin{cases} 1)\ x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}n + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}\right)}\right)} \\ \quad + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}n - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}\right)}\right)} \end{cases}$$

und nun aus (§. 72.)

XXIX. $$\begin{cases} 2)\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{B} \\ 3)\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{B} \end{cases}$$

Da die Werthe von x allgemein gültig bleiben müssen, so müssen die Quadratwurzelzeichen in jeder Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, weil sich in Fälen, wo alle 3 Wurzeln möglich wären, die unmöglichen Glieder müssen aufheben können.

Wir werden in der Folge (§. 75*) sehen, daß die Wurzel (No. 1.) allemal möglich bleibt, es mag $\frac{1}{4}n^2 + \frac{n^3}{27}$ bejaht oder verneint seyn. Im letzteren Falle hebt sich das Unmögliche gegenseitig auf. Umgekehrt werden wir finden, daß die Werthe von x (No. 2 und 3) wegen den hinzugekommenen unmöglichen Faktoren nur dann möglich werden, wann $\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}\right)}$ unmöglich d. i. $\frac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}$ verneint wird, oder wann $27n^2 + 4m^3$ verneint ist.

Dieses setzt nothwendig einen verneinten Werth von m voraus, n mag bejaht oder verneint seyn. So läßt sich also aus der bloßen Beschaffenheit der Größen m und n allemal beurtheilen, ob die Gleichung $x^3 + mx + n = 0$ eine oder 3 mögliche Wurzeln habe.

§. 75.

Die vorstehende Auflösung enthält die sogenannte Cardanische Regel, wie sie in den Lehrbüchern gewöhnlich vorgetragen wird. Sie kann aber, besonders wegen der Wurzeln No. 2 und 3 (s. den folgenden §.) auf sehr weitläuftige Rech-

rungen führen, die man vermeiden kann; setzt man nämlich $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = e$, so hat man, n statt γ gesetzt, in (XXV)

$$2)\ x = -\frac{e}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}e^2 + \frac{n^3}{e}\right)}$$

$$3)\ x = -\frac{e}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}e^2 + \frac{n^3}{e}\right)}$$

woraus die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der beiden übrigen Wurzeln sogleich entschieden wird. Inzwischen hat auch die Bestimmung der ersten Wurzel (vorigen §. No. 1.) für die Anwendung durchaus keinen Nutzen, indem man die Wurzeln einer kubischen Gleichung doch immer nur bei numerischen Gleichungen zu suchen hat, wo man dann einer möglichen Wurzeln auf ähnliche Weise, wie bei Ausziehung der Kubikwurzeln erhalten kann, oder auch nach Newtons Methode.

§. 75. *

Wenn (§. 74.) $\frac{m^3}{27} > \frac{1}{4}n^2$ und überdas verneint ist, so können wir $-p$ statt $\frac{1}{4}n^2 + \frac{m^3}{27}$ setzen, also (§. 74. No. 1.)

$$+ = \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}n + \sqrt{-p})} + \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}n - \sqrt{-p})}$$

Es ist aber

$$(-\tfrac{1}{2}n + \sqrt{-p})^{\frac{1}{3}} = (-\tfrac{1}{2}n)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\cdot(-\tfrac{1}{2}n)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{-p} + \frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})}{1\cdot 2}\cdot(-\tfrac{1}{2}n)^{-\frac{5}{3}}\cdot(-p) + \text{etc.}$$

$$= (-\tfrac{1}{2}n)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\cdot(-\tfrac{1}{2}n)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-p} + \tfrac{1}{9}\cdot(-\tfrac{1}{2}n)^{-\frac{5}{3}}\cdot p + \text{etc.}$$

Ebenso $(-\frac{1}{2}n - \sqrt{-p})^{\frac{1}{3}} =$

$$\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-p} + \tfrac{1}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot p - \text{etc.}$$

Addirt man beide Reihen zusammen, so heben die geraden Glieder, welche den unmöglichen Faktor enthalten, einander auf, und die ungeraden kommen alle mit einerlei Zeichen 2mal vor. Es wird hiernach

$$x = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}n + \frac{2p}{9\cdot\sqrt[3]{-\frac{n}{32}}}} \cdots\cdots$$

Der Werth von x (§. 74. No. 2.) wird

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}n+\sqrt{-p}\right)} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}n-\sqrt{-p}\right)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\left(\tfrac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-p} + \tfrac{1}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot p \cdots\cdots\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\left(\tfrac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-p} + \tfrac{1}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot p \cdots\cdots\right)$$

$$+\frac{\sqrt{-3}}{2}\cdot\left(-\left(\tfrac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-p} + \tfrac{1}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot p \cdots\cdots\right)$$

$$-\frac{\sqrt{-3}}{2}\cdot\left(-\left(\tfrac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-p} + \tfrac{1}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot p \cdots\cdots\right)$$

$$= -\left(\tfrac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{5}{3}} \ldots\ldots$$
$$+ \frac{2\sqrt{-3}}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-p} \ldots\ldots$$

oder

$$x = -\left(\tfrac{1}{2}n\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot p \ldots\ldots$$
$$-\tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}n\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{3p} \ldots\ldots$$

In jedem dieser beiden Theile des Werthes von x, wovon jeder ohne Ende fortgeht, haben sich die unmöglichen Glieder aufgehoben, so daß der Werth von x (No. 2.) lauter mögliche Glieder giebt.

Ebenso verhält es sich mit dem Werthe §. 74. No. 3.

So ließen sich also die 3 möglichen Wurzeln einer kubischen Gleichung mittelst des binomischen Lehrsatzes wirklich berechnen.

§. 76.

Die Erfindung der Wurzeln oder einer der Wurzeln einer kubischen Gleichung wird durch die Beschaffenheit der Koëfficienten mehr oder weniger erschwert; und von dieser hängt die Art und Weise des Verfahrens ab, durch welches man am leichtesten zum Ziele kommt. Hätte man z. B. die Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 10 = 0$$

so untersucht man sie zuerst in Bezug auf ihre Zeichen, diese belehren uns, daß sie 2 bejahte und eine verneinte haben kann. Die Möglichkeit einer verneinten fällt gleich ins Auge. Wir können also sogleich einen Versuch z. B. mit $x = -3$ machen; dieses giebt

$$-27 + 18 + 9 + 10 > 0$$

Ein Versuch mit -4 giebt

$$-64 + 32 + 12 + 10 < 0$$

also fällt eine Wurzel zwischen — 3 und — 4. Nehmen wir $x = -3{,}5$; so wird

$$-42{,}875 + 24{,}5 + 10{,}5 + 10 = 2{,}125$$

Wir dürfen also den Werth von x nur wenig abändern. Setzen wir $x = -3{,}6$; so wird

$$-46{,}656 + 25{,}92 + 10{,}8 + 10 = 0{,}064$$

also sehr genau $x = -3{,}6$

Nimmt man $x = -3{,}62$ so wird

$$-47{,}4379 + 26{,}2088 + 10{,}86 + 10 = -0{,}3691$$

Also fällt x zwischen — 3,60 und — 3,62, aber näher an — 3,60. Nimmt man nun $x = -3{,}605$, so wird

$$-46{,}850 + 25{,}992 + 10{,}815 + 10 = -0{,}043$$

Demnach fällt x zwischen — 3,600 und — 3,605 und man erhält nun sehr genau $x = -3{,}602$, so daß man hierbei noch nicht um $\frac{1}{1000}$ x fehlt.

§. 77.

So läßt sich allemal leicht ein Werth von x finden, wobei man wenigstens noch nicht um $\frac{1}{100}$ x fehlt, und ein solcher Werth ist in den allermeisten Fällen der Ausübung (astronomische Berechnungen bei Seite gesetzt) hinlänglich. Will man aber weiter gehen, so kann man sich hiernächst der Newtonschen Näherungsmethode bedienen. Ist nämlich p ein solcher Werth von x, so daß der genaue Werth $= p + \mu$ gesetzt werden müßte, wo μ einen bejahten oder verneinten Werth haben kann; so setze man in der allgemeinen Gleichung

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$p + \mu$ statt x und lasse solche Glieder weg, welche die 2te oder höhere Potenzen von μ enthalten, weil solche sehr unbedeutend werden; so wird

$$\begin{aligned} x^3 &= p^3 + 3p^2\mu \\ \alpha x^2 &= \alpha p^2 + 2\alpha p\mu \\ \beta x &= \beta p + \beta\mu \\ \gamma &= \gamma \end{aligned}$$

also $p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma + (\beta + 2\alpha\beta + 3p^2).\mu = 0$

Diese Gleichung kommt der Wahrheit sehr nahe; sie giebt daher sehr nahe

$$\text{XXX.} \quad \mu = -\frac{p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma}{3p^2 + 2\alpha p + \beta}$$

Ex. Im vorigen §. war $p = -3{,}602$; $\alpha = 2$, $\beta = -3$ und $\gamma = 10$; also

$$\mu = -\frac{-46{,}73379 + 25{,}9488 + 10{,}806 + 10}{38{,}9232 - 14{,}408 - 3}$$

$$= -\frac{0{,}02101}{21{,}5152} = -0{,}00097$$

und nunmehr

$$x = -3{,}602 - 0{,}00097 = -3{,}60297$$

Hatte man vorher schon p so genau, daß dabei der Fehler nicht mehr $0{,}01 . x$ betrug, so ist der gefundene Werth von μ auch nicht mehr um $0{,}01 . \mu$ vom wahren Werthe von μ verschieden, daß man also hier $\mu = -0{,}00097$ bis zur 5ten Stelle als richtig, also auch den gefundenen Werth von x in 5 Decimalstellen beibehalten kann.

In 6 Decimalstellen fände man $\mu = 0{,}000976$ wo aber die 6te Stelle unsicher wäre, daher ich nur 5 Stellen beibehalten habe.

Für eine nochmalige Annäherung hätte man $p = -3{,}60297$, also

$$p^3 = -\ 46,7715509 \qquad 3p^2 = 38,944164$$
$$\alpha p^2 = 25,0627760 \qquad 2\alpha p = -\ 14,411880$$
$$\beta p = 10,8089100 \qquad \beta = -\ 3,000000$$
$$\gamma = 10,0000000$$

Daher

$$\mu = -\ \frac{0,0\,0\,135}{21,532284} = -\ 0,0000062$$

wo man wieder nicht um 0,01. μ fehlen, also 62 mit Sicherheit beibehalten kann.

Demnach jetzt $x = -\ 3,6029762$.

So läßt sich die Berechnung soweit man will fortsetzen.

Die beiden andern Wurzeln geben sich nun aus (XXV). Hier ist aber

$\left(\frac{\alpha + e}{2}\right)^2 = \left(\frac{2 - 3,602\ldots}{2}\right)^2$, und $\frac{\gamma}{e} = -\frac{10}{3,602\ldots}$

also die Größe unter dem Wurzelzeichen verneint, folglich die beiden andern Wurzeln unmöglich.

§. 78.

Man kann aber auch eine von der Wurzeln durch ein direktes Verfahren ganz so wie bei Ausziehung der Kubikwurzel erhalten. Ein einziges Beispiel ist zur Erläuterung dieses Verfahrens hinlänglich.

Soll z. B. eine von den Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

gesucht werden, so kann man dafür

1) $x^3 + 0 . x^2 - 2x - 5 = 0$

2) $x^3 - 0 . x^2 - 2x - 5 = 0$

schreiben. Jede dieser Gleichungen hat eine Abwechslung und 2 Folgen; also eine bejahte und 2 verneinte Wurzeln, wofern sie alle 3 möglich sind. Offenbar ist aber eine bejahte möglich; man stellt also die Berechnung gleich für die bejahte an.

Man denkt sich, wie bei Ausziehung der Kubikwurzel die Wurzel x aus zwei Theilen zusammengesetzt, z. B. $x = a + b$, und ändert hiernach die vorgegebene Gleichung um; nämlich

$$x^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$$
$$2x = 2a + 2b$$
$$5 = 5$$

also, indem man nach den Potenzen von b ordnet,

$$(a^3 - 2a) + (3a^2 - 2).\ b + 3ab^2 + b^3 = 5$$

Das Verfahren unterscheidet sich nunmehr von dem bei Ausziehung der Kubikwurzel aus 5 blos darin, daß man bei letzterer $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 5$ setzt. Hiernach bedarf die Rechnung durchaus keiner weiteren Erläuterung. Sie ist folgende.

$(a^3 - 2a) + (3a^2 - 2).\ b + 3ab^2 + b^3 = 5$ (Wurzel.

$a^3 - 2a = 8 - 4$ (für $a = 2$) ..... $= 4$ | 2,0945.... = x

Rest $= (3a^2 - 2).\ b + 3ab^2 + b^3 = 1$

Divisor $3a^2 - 2 = 12 - 2$ .... $= 10$

(giebt in der Wurzel die 0)

Produkte $(3a^2 - 2).\ b + 3ab^2 + b^3 = 0$

Rest $= (3a^2 - 2)\,b + 3ab^2 + b^3 = 1$

Divisor $3a^2 - 2 = 12 - 2$ .... $= 10$

$(3a^2 - 2).\ b = 10 . 0{,}9$ .... $= 0{,}9$

$3ab^2 = 3 . 2 . 0{,}0081$ ..... $= 0{,}0486$

$b^3 = 0{,}09^3$ ..... $= 0{,}000729$

Summe $= 0{,}949329$

Diese Summe vom vorigen Rest abgezogen, giebt Rest ..... $= 0{,}050671$

Divisor $3a^2 - 2 = 3 . 2{,}09^2 - 2 = 11{,}1043$

$(3a^2 - 2).\ b = 11{,}1043 . 0{,}004 . = 0{,}0444172$

$3ab^2 = 3 . 2{,}09 . 0{,}004^2 = 0{,}00010032$

$b^3 = 0{,}004^3$ ..... $= 0{,}000000064$

Summe $= 0{,}044517584$

Abgez. vom vorigen Rest giebt Rest $= 0{,}006153416$
Divisor $3a^2 - 2 = 3 . 2{,}094^2 - 2 = 11{,}154508$

$(3a^2 - 2) . b = 11{,}154508 . 0{,}0005 = 0{,}0557725400$
$b^2 = 3 . 2{,}094 . 0{,}0005 = 0{,}0000157050$
$b^3 = 0{,}0005^3 . . . . . = 0{,}0000000125$

Summe $= 0{,}0557741106 25$

u. s. f.

Die beiden andern Wurzeln werden nach der obigen quadratischen Gleichung unmöglich. Diese Methode wurde zuerst von einem gewissen Hrn. Bauer im J. 1810 in einer Abhandlung über die Auflösung numerischer Gleichungen angegeben. Sie verdient unsere Aufmerksamkeit und kann als ein schöner Beitrag zur Vervollkommung der Algebra angesehen werden. Freilich forderte ihre Entdeckung nichts weiter als Bekanntschaft mit der gemeinen Buchstabenrechnung, und ich möchte beinahe sagen zu wenig Tiefsinn und analytische Kenntniß, als daß sie einem Newton, Euler oder Lagrange vorbehalten gewesen wäre. Dieser Umstand kann aber ihren inneren Werth nicht herabsetzen. Von einigen anderen hierher gehörigen Bemühungen gebe ich im folgenden Kapitel Nachricht.

§. 79.

Kubische Gleichungen kommen in der Ausübung häufig vor. Zuweilen läßt sich auch eine Gleichung vom 6ten Grade auf eine kubische bringen. Wäre nämlich

$$x^6 + \beta x^4 + \delta x^2 + \zeta = 0$$

so darf man nur $x^2 = y$ setzen; dieses giebt

$$y^3 + \beta y^2 + \delta y + \zeta = 0$$

Hat man einen Werth von y gefunden, so hat man $x = \sqrt{y}$.

1. Ex. Man denke sich am Ende eines Wassergrabens eine Fallschütze; diese soll so hoch aufgezogen werden, daß in jeder Sekunde eine bestimmte Wassermenge M durch die Schützenöffnung hinabstürzt; die Höhe des Wasserstandes über der Schützenschwelle $= m$, und die Breite der Schützenöffnung α sind gegeben: wie hoch muß die Schütze aufgezogen werden?

Zur Beantwortung gehören Kenntnisse aus der Hydraulik. Diesen zufolge läßt sich der Erfolg so annehmen, als ob jedes Wassertheilchen mit der Geschwindigkeit $0,8 . \sqrt{30} . (m + x)$ in die Schützenöffnung träte, wenn x die Tiefe vom unteren Rande des Schutzbretts unter dem anliegenden Wasserspiegel bezeichnet, und alles sich auf Pariser Fusse beziehr. Die Geschwindigkeit ist der in 1 Sekunde durchlaufene Weg. Ist also M die in 1 Sekunde abfliessende Wassermenge, so ist

$$M = 0,8 . \alpha . (m - x) . \sqrt{30} . (m + x)$$

Es kommt also hier auf die Bestimmung von x an, und die Gleichung muß daher zuerst gehörig geordnet werden.

Um nun zuerst das Wurzelzeichen wegzuschaffen, muß auf beiden Seiten das Quadrat gemacht werden. Dieses giebt

$$\begin{aligned} M^2 &= 0,64 . \alpha^2 . (m - x)^2 . 30 . (m + x) \\ &= 19,2 . \alpha^2 . (m^2 - 2mx + x^2) . (m + x) \\ &= 19,2 . \alpha^2 . \left(\begin{array}{r} m^3 - 2m^2x + mx^2 - 2mx^2 \\ + m^2x + x^3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

und

$$x^3 - mx^2 - m^2x + \left(m^3 - \frac{M^2}{19,2 . \alpha^2}\right) = 0$$

Es sey nun $m = 3$ Fuß, $\alpha = 2$ und $M = 23,61$ Kubik-Fuß, so hat man die numerische Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 19,75 = 0 \quad (\odot$$

Setzt man nun a + b statt x, so wird

$(a^3 - 3a^2 - 9a) + (3a^2 - 6a - 9) \cdot b + (3a - 3) \cdot b^2 + b^3 = -19{,}75$ (Wurzel $1{,}7667 \ldots = x$)

$a^3 - 3a^2 - 9a =$ (weil $a = 1$ wird) $1 - 3 - 9 \ldots = -11$

1ter Rest $= (3a^2 - 6a - 9) \cdot b + (3a - 3) \cdot b^2 + b^3 = -8{,}75$

Divisor $(3a^2 - 6a - 9) = 3 - 6 - 9 \ldots = -12$

Produkte (aus $0{,}7 = b$) $\ldots (3a^2 - 6a - 9) \cdot 0{,}7 \ldots = -8{,}40$

$(3a - 3) \cdot 0{,}7^2 \ldots = -0$

$0{,}7^2 \ldots = -0{,}343$

Summe $-8{,}057$

2ter Rest $(3a^2 - 6a - 9) \cdot b + (3a - 3) \cdot b^2 + b^3$ (wo jetzt $a = 1{,}7$ ist) $= -0{,}693$

Divisor $(3a^2 - 6a - 9) \ldots = -10{,}53$

Produkte (aus $0{,}06 = b$), $(3a^2 - 6a - 9) \cdot 0{,}06 \ldots = -0{,}6318$

$(3a - 3) \cdot 0{,}06^2 \ldots = -0{,}00756$

$0{,}06^2 \ldots = -0{,}000216$

Summe $-0{,}624024$

3ter Rest $(3a^2 - 6a - 9) \cdot b + (3a - 3) \cdot b^2 + b^3 = -0{,}068976$

Divisor $(3a^2 - 6a - 9)$ (wo jetzt $a = 1{,}76$ ist) $\ldots = -10{,}2672$

Produkte (aus $0{,}006 = b$)

$(3a^2 - 6a - 9) \cdot 0{,}006 \ldots\ldots\ldots = -\ 0{,}0616032$

$(3a - 3) \cdot 0{,}006^2 \ldots\ldots\ldots = -\ 0{,}00010208$ } Summe $-\ 0{,}061500904$

$0{,}006^3 \ldots\ldots\ldots = -\ 0{,}000000216$

4ter Rest. $(3a^2 - 6a - 9) \cdot b + (3a - 3) \cdot b^2 + b^3 = -\ 0{,}007475096$

(wo jetzt $a = 1{,}766$ ist)

Divisor $(3a^2 - 6a - 9) \ldots\ldots\ldots\ldots = -\ 10{,}239732$

giebt zum Quotient 0,0007 u. s. f.

Hiernach sind die beiden übrigen Wurzeln

$$= -\frac{-3 + 1{,}7667}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{-3 + 1{,}7667}{2}\right)^2 + \frac{19{,}75}{1{,}7667}\right)}$$

also 2) $x = 4{,}02 \ldots$ 3) $x = -\ 2{,}77 \ldots$

welche beide also der Gleichung (⊙) als einem bloßen Zahlenausdruck Genüge thun, aber in Bezug auf die abfliessende Wassermenge praktisch unmöglich sind.

2. Ex. Aufg. Man soll von einem abgekürzten Kegel von oben herab ein Stück von gegebenem Inhalt abschneiden.

Aufl. Der obere Durchmesser des gegebenen Kegels sey $= d$, der untere $= D$, die Höhe des verlangten Stücks k sey $= x$, und der noch unbekannte Durchmesser von der unteren Grundfläche des Stücks $k = \delta$, so ist

$$1)\ \delta = d + 2 \cdot \frac{x}{h} \cdot \frac{D - d}{2} = d + \frac{x}{h} \cdot (D - d)$$

$$2)\ k = 0{,}785 \cdot \frac{\delta^2 + d^2 + d\delta}{3} \cdot x$$

Substituirt man No. 2. den Werth von δ aus No. 1., so wird

$$k = 0{,}2617 \cdot \left(d^2 + \frac{2d\,(D - d)}{h} \cdot x + \left(\frac{D - d}{h}\right)^2 \cdot x^2 + 2d^2 + \frac{D - d}{h} \cdot dx \right) \cdot x$$

und

$$\frac{k}{0{,}2617} = \left(\frac{D - d}{h}\right) \cdot x^3 + \frac{3d \cdot (D - d)}{h} \cdot x^2 + 3d^2 \cdot x$$

Demnach

$$x^3 + \frac{3dh}{D - d} x^2 + \frac{3d^2 h^2}{(D - d)^2} \cdot x + \frac{d^3 h^3}{(D - d)^3} = \frac{h^2 k}{0{,}2617 \cdot (D - d)^2} + \frac{d^3 h^3}{(D - d)^3}$$

Dieser Fall giebt eine sehr schöne Anwendung von (§. 67). Er giebt nun

$$x + \frac{dh}{D - d} = \sqrt[3]{\left(\frac{h^2 k}{0{,}2617 \cdot (D - d)^2} + \left(\frac{dk}{D - d}\right)^3\right)}$$

und

$$x = -\frac{dh}{D - d} + \sqrt[3]{\left(\frac{h^2 k}{0{,}2617 \cdot (D - d)^2} + \left(\frac{dh}{D - d}\right)^3\right)}$$

oder auch

$$x = \frac{-dh + \sqrt[3]{\left(\frac{(D - d) \cdot h^2 k}{0{,}2617} + (dh)^3\right)}}{D - d}$$

Alle 3 Werthe von x sind in diesem Falle einander gleich.

Neuntes Kapitel.

Auflösung biquadratischer und höherer auch einiger transscendentischer Gleichungen.

§. 80.

Die allgemeine Form aller biquadratischen Gleichungen ist

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

Wird α und $\gamma = 0$, so hat man

$$x^4 + \beta x^2 + \delta = 0$$

eine Gleichung, die sich allemal auf eine quadratische

$$y^2 + \beta y + \delta = 0$$

bringen, also leicht auflösen läßt, indem man $x^2 = y$ setzt. Hat man dann y gefunden, so hat man auch

$$x = \pm \sqrt{y}$$

§. 81.

Außer dem besonderen Falle (§. 80.) müssen wir auf die allgemeine Bestimmung eines Werthes von x Verzicht thun. Zwar findet man z. B. in Eulers vollständiger Anleitung zur Algebra auch die allgemeine Auflösung der biquadratischen Gleichungen; sie ist aber für die Ausübung ohne allen Nutzen, in noch höherem Grade als die Cardanische Regel für die Auflösung der kubischen Gleichungen, daher ich mich auch hier gar nicht darauf einlasse.

Umsoweniger kann ich hier von der Auflösung noch höherer Gleichungen eine allgemeine Theorie mittheilen, da selbst Euler solches nicht vermogte. Hätte er es aber auch vermogt, so belehrt uns doch schon die allgemeine Auflösung der kubischen Gleichungen, daß für die Anwendung nichts damit hätte gewonnen werden können. Der letzte Zweck aller analytischen Untersuchungen bleibt allerdings der, eine vorkommende geordnete numerische Gleichung aufzulösen, und jede auch noch so tiefsinnige Untersuchung, die mit diesem Zwecke nicht in näherer oder entfernterer Verbindung steht, ist ein mathematischer Luxus, der für die Ausübung keinen Nutzen hat und keinen Dank verdient. Darum haben sich auch die größten Analytiker mit diesem Gegenstande vorzüglich beschäfftigt, wie Euler und Lagrange. Man findet ihre hierher gehörige Untersuchungen in

Eulers Anleitung zur Differentialrechnung, übersetzt von Michelsen III. Th. und in

Dessen Einleitung in die Analysis der Unendlichen; übersetzt von Michelsen III. Buch. Berlin 1791.

Die letztere Schrift führt auch noch einen eigenen Titel:

Die Theorie der Gleichungen aus den Schriften der Herren Euler und Lagrange von Michelsen.

Wer mit dem Geiste dieser großen Männer näher bekannt werden und die tiefen Kunstgriffe kennen lernen will, der sie sich bei jeder Untersuchung zu bemächtigen wußten, wird in diesen Schriften hinlängliche Veranlassung finden, die Talente ihrer Urheber zu bewundern. Aber in Bezug auf wirkliche Anwendungen zur Erleichterung des Kalkuls in vorkommenden Fällen wird der auf ein solches Studium verwendete Fleiß sich nicht belohnt finden.

Die neueste hierher gehörige Schrift ist meines Wissens, außer der schon erwähnten von Bauer,

Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numeriques d'un degré quelconque, d'après la quelle tout le calcul exigé pour cette résolution se reduit à l'emploie des deux prémières règles de l'Arithmetique — par F. D. Budan, à Paris chez Courcier 1807.

Da die gesammte Analysis auf 2 arithmetische Axiome gegründet ist, so darf man sich nicht wundern, wenn man hier auf die deux prémières règles de l'Arithmetique eine Näherungsmethode gebaut findet, die auch bei dem geduldigsten an ewigen Kalkul gewöhnten Rechner keine Ausdauer hoffen darf. Und doch hält sie der Verfasser für weit kürzer und bequemer als die Lagrangischen Methoden.

Bei dem direkten Verfahren durch wirkliche Wurzelausziehung bedürfen wir solcher abschreckenden Hülfsmittel nicht. Daß sich aber dieses direkte Verfahren bei allen höheren Gleichungen ganz auf dieselbe Weise wie bei den kubischen anwenden läßt, fällt gleich ins Auge. Auch die Newtonsche Näherungsmethode (§. 77.) ist bei höheren Gleichungen anwendbar. Meistens führen Proberechnungen am geschwindesten zum Ziele.

§. 82.

Die besondere Beschaffenheit numerischer Gleichungen kann in einzelnen Fällen ihre Auflösung außerordentlich erleichtern, wann nämlich die Koëfficienten so beschaffen sind, daß das letzte Glied entweder nur von den höchsten oder nur von den niedrigsten Potenzen von x hauptsächlich abhängt. Es sey z. B.

$$x^5 + 2x^2 - 3x - 1000 = 0$$

also $x^5 + 2x^2 - 3x = 1000$; so fällt ins Auge, daß die Zahl 1000 hauptsächlich durch das erste Glied x^5 bestimmt wird. Eigentlich wäre $x = \sqrt[5]{(1000 - 2x^2 + 3x)}$,

welches aber nur sehr wenig von $\sqrt[5]{1000}$ verschieden seyn kann. Man sieht nämlich, daß x beinahe 4 seyn muß, also $3x - 2x^2$ beiläufig $= -20$; es ist aber $\sqrt[5]{1000}$ nur sehr wenig von $\sqrt[5]{(1000 - 20)}$ verschieden. Um so genauer wird also

$$x = \sqrt[5]{980}$$

Es ist aber

$$\frac{\log. 980}{5l} = 0,5982452$$

Daher $x = 3,965$

Nunmehr dürfte man nur

$$2x^2 = 2 \cdot 3,96^2 = 31,36$$
$$3x = 3 \cdot 3,96 = 11,88$$

setzen, so würde sehr genau

$$x = \sqrt[5]{(1000 - 31,36 + 11,88)} = \sqrt[5]{980,52}$$

Hätte man

$$x^5 + 5x^4 - 45x^2 - 20x + 1 = 0$$

so sieht man, daß ein ziemlich kleiner Bruch für x gesetzt werden könnte, und daß daher auch noch beiläufig

$$- 45x^2 - 20x + 1 = 0$$

oder

$$x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{1}{45} = 0 \text{ seyn müsse}$$

Daher beiläufig $x = 0,046$

Hiernach wäre

$$x^5 = 0,0000002$$
$$5x^4 = 0,0000220$$

also beinahe

$$- 45 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 1,0000222 = 0$$

oder

$$x^2 + \frac{4}{9}x - 0{,}022226 = 0$$

woraus sich $x = -\frac{2}{9} + \sqrt{0{,}071609}$ ergiebt, also

$$x = -\frac{2}{9} + 0{,}26759 = 0{,}0453$$

Ein verneinter Werth von x würde die 4 ersten Glieder der gegebenen Gleichung ziemlich groß geben, so daß bei einer sehr geringen Aenderung dieses verneinten Werths schon,

$$x^5 + 5x^4 - 45x^2 - 20x = 0$$

werden würde, also auch noch

$$x^4 + 5x^3 - 45x - 20 = 0$$

Es läßt sich aber auch nach (§. 55.) aus der vorgegebenen Gleichung, aus welcher man schon eine Wurzel $-\varphi = 0{,}0453$ gefunden hat, eine neue von der Form

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

machen; also beinahe

$$5x^3 - 45x - 20 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

wodurch man also eine Gleichung vom 3ten Grade erhält, aus der wir die 3 Werthe von x leicht finden können, die dann wenigstens beinahe richtig sind.

Wäre a, b, c, d die gefundenen 4 Wurzeln, und alle möglich, so wäre, vermöge der Natur der Koëfficienten, wenn e die 5te Wurzel bezeichnet, der Koëfficient des 2ten Gliedes unserer Gleichung vom 5ten Grade, oder $5 = -a - b - c - d - e$ also $e = -(5 + a + b + c + d)$.

So giebt es für einzelne Fälle manche Vortheile für die Bestimmung der Wurzeln einer höheren Gleichung, die man durch Uebung selbst finden lernt.

§. 83.

Einfache Exponentialgleichungen wie

$$a - m b^x = 0$$

lassen sich nur mittelst Logarithmen auflösen. Nämlich

$$b^x = \frac{a}{m}; \; x \,.\, \log.\, b = l\,a - l\,m$$

$$\text{also} \quad x = \frac{l.\,a - l.\,m}{l.\,b}$$

§. 84.

Einfache logarithmische Gleichungen, wie

$$(a - b \,.\, \log.\, x)^n = A$$

lassen sich mittelst schon berechneter Logarithmentafeln gleichfalls auflösen. Nämlich

$$a - b \,.\, \log.\, x = \sqrt[n]{A}$$

$$\log.\, x = \frac{a - \sqrt[n]{A}}{b}$$

Ist nun e die Zahl, deren Logarithme = 1 ist, so hat man auch

$$\log.\, x = \frac{a - \sqrt[n]{A}}{b} \,.\, \log.\, e$$

$$= \log.\, e^{\frac{a - \sqrt[n]{A}}{b}}$$

$$\text{folglich} \quad x = e^{\frac{a - \sqrt[n]{A}}{b}}$$

Zehentes Kapitel.

Von arithmetischen und geometrischen Reihen. (§. 24.)

§. 85.

Die allgemeine Form aller arithmetischen Reihen ist

$$a \quad a + d \quad a + 2d \quad a + 3d \ldots\ldots a + (n - 1) . d$$

Ist d bejaht, so ist es eine zunehmende oder steigende Reihe; ist d verneint, so ist es eine abnehmende oder fallende Reihe; n ist die Anzahl der Glieder. Ueberhaupt ist aber j des nte Glied $= a + (n - 1) . d$; daher auch der Ausdruck $a + (n - 1) . d$ ein allgemeines Glied der Reihe genannt wird. a ist das erste Glied, und d die Differenz der Glieder. Bezeichnen wir die Größe des letzten Gliedes mit u, und die Summe aller n Glieder mit S, so ergeben sich für die Betrachtung der arithmetischen Reihen 5 Bestimmungsstücke a, d, n, u und S, von welchen, wie wir sogleich sehen werden, allemal 2 durch die 3 übrigen bestimmt sind. Da nun nach der Kombinationslehre in 5 Größen $\frac{5 . 4}{1 . 2} = 10$ Ternen enthalten sind, so ergeben sich 10 verschiedene Aufgaben, so daß in jeder Aufgabe 2 unbekannte Größen gesucht werden.

Um aber bestimmte Werthe für 2 von den 5 Größen zu erhalten, sind zwei von einander unabhängige Gleichungen zwischen den 5 Größen hinlänglich, die sich aus der Natur der Sache ergeben.

§. 86.

Aus 3 von den 5 Bestimmungsstücken a, u, n, d, S die beiden übrigen zu finden.

Aufl. Die Summe des 1ten und letzten Gliedes ist $a + (a + (n - 1).d) = 2a + (n - 1).d$; die des 2ten und des 2ten vom Ende ist $(a + d) + (a + (n - 2).d) = 2a + (n - 1).d$; die des 3ten und des 3ten vom Ende $= (a + 2d) + (a + (n - 3).d) = 2a + (n - 1).d$; überhaupt die Summe zweier vom ersten und letzten gleichweit abstehender Glieder $= 2a + (n - 1).d$. Soviel Paare von Gliedern also vorhanden sind, sovielmal hat man $2a + (n - 1).d$; man hat aber $\frac{1}{2}n$ Paare, also ist die Summe aller Glieder $= \frac{1}{2}n.(2a + (n - 1).d)$; und weil das letzte Glied allemal $a + (n - 1).d$ ist, so erhält man hiermit die erforderlichen Fundamentalgleichungen, und die Auflösung der ersten Aufgabe.

I. Aus a, n, d die u und S zu finden.

Man erhält

1) $u = a + (n - 1).d$

2) $S = \frac{1}{2}n.(2a + (n - 1).d)$

Da jede dieser Gleichungen 4 Größen enthält, so muß wenigstens eine der beiden unbekannten in einer der beiden Gleichungen vorkommen, die andere kommt dann in der anderen entweder allein oder nebst der vorigen vor, man mag welches Paar man will als unbekannt annehmen. Wird z. B. a und S aus u, n, d gesucht, so enthält die 1te Glei-

chung die a, die 2te die S; weil aber in der 2ten die u fehlt, so muß außer der S in der 2ten nothwendig auch die a vorkommen, daß also in diesem Falle in No. 2. beide unbekannte Größen enthalten sind. Hiermit werden also beide Größen a und S bestimmt. Uebrigens fällt gleich ins Auge, daß bei allen hierher gehörigen Formeln vorausgesetzt wird, n sey eine ganze Zahl. Nach den bisherigen Lehren findet man nun

II. Aus a, u, d

$$1)\ n = 1 + \frac{u - a}{d}$$

$$2)\ S = \frac{u^2 - a^2 + (a + u) \cdot d}{2d}$$

III. Aus u, n, d

1) (nach I, 1)

$$a = u + (1 - n) \cdot d$$

und, indem man (in I, 2) $a + u$ statt $2a + (n - 1) \cdot d$ schreibt,

$$S = \tfrac{1}{2} n \cdot (a + u) \quad (\odot$$

$$= \tfrac{1}{2} n \cdot (u + (1 - n) \cdot d + u)$$

oder

$$2)\ S = \frac{n \cdot (2u + (1 - n) \cdot d)}{2}$$

IV. Aus a, u, S

1) nach III, 1 $(\odot)$

$$n = \frac{2S}{a + u}$$

2) aus II, 2

$$d = \frac{u^2 - a^2}{2S - (a + u)}$$

V. Aus u, d, S

Mittelst Auflösung einer quadratischen Gleichung aus IV, 2

1) $a = \frac{1}{2} d \pm \sqrt{((u + \frac{1}{2} d)^2 - 2dS)}$

Man muß ſich erinneren, daß

$u^2 + du + \frac{1}{4} d^2 = (u + \frac{1}{2} d)^2$ iſt.

und ebenſo aus III, 2

$$2) \; n = \frac{2u + d \mp \sqrt{(-8dS + (2u + d)^2)}}{2d}$$

VI. Aus a, n, S

aus IV, 1

$$1) \; u = \frac{2S - an}{n}$$

aus I, 2

$$2) \; d = \frac{2 . (S - an)}{n . (n - 1)}$$

VII. Aus u, n, S

aus IV, 1

$$1) \; a = \frac{2S - un}{n}$$

und III, 2

$$2) \; d = \frac{2 . (un - S)}{n . (n - 1)}$$

VIII. Aus n, d, S

aus I, 2

$$1) \; a = \frac{2S - n . (n - 1) . d}{2n}$$

und III, 2

$$2) \; u = \frac{n . (n - 1) . d + 2S}{2n}$$

IX. Aus a, u, n

aus IV, 1

$$1) \; S = \frac{(a + u) . n}{2}$$

und I, 1

$$2) \; d = \frac{u - a}{n - 1}$$

X. Aus a, d, S

aus I, 2

$$1)\ n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(8 . d S + (2a - d)^2)}}{2d}$$

und II, 2

$$2)\ u = -\tfrac{1}{2} d \pm \sqrt{(2 d S + (a - \tfrac{1}{2} d)^2)}$$

Anm. Man kommt zuweilen in andern Berechnungen zufällig auf eine arithmetische Reihe. Unmittelbare Anwendungen kommen selten vor.

Ex. Man hat 400 Gulden zur Ausgrabung und Ausbauung eines Brunnens ausgesetzt; für den 1ten Fuß von oben herab sollen 2 Gulden bezahlt werden, und für jeden folgenden 3 kr. mehr als für den vorhergehenden: bis zu welcher Tiefe werden die 400 fl. reichen? Hier hat man, weil 2 fl. = 120 kr. sind, folgende Zahlungen

120 + 123 + 126 . . . . . + bis zum letzten Fuße.

Von dieser Reihe hat man

$a = 120$, $d = 3$ und $S = 24000$ $(= 400 . 60)$

Man findet also die Anzahl Fuße oder n (aus X) =

$$\frac{3 - 2 . 120 + \sqrt{(8 . 3 . 24000 + (2 . 120 - 3)^2)}}{2 . 3}$$

Vom Resultate behält man nur die ganze Zahl bei, da dann von den 400 fl. noch etwas überschüßig bleibt, wovon sich noch ein Theil eines Fusses ausgraben läßt, den man leicht berechnen kann.

§. 87.

Jede geometrische Reihe ist unter folgender Form begriffen:

$$a + ea + e^2 a + e^3 a + e^4 a \ldots + e^{n-1} a = S$$

a ist das erste Glied, e der Exponent der Reihe, n die Zahl der Glieder, S ihre Summe. Bezeichnet u das letzte

Glied, so hat man sogleich eine Fundamentalgleichung $u = e^{n-1} a$. Es ist also nur noch eine für S zu suchen, um auch hier 10 Aufgaben auflösen zu können. Multiplicirt man die vorstehende Reihe mit e, so erhält man eS, und zieht man dann S von eS ab, so erhält man

$$ea + e^2a + e^3a + \ldots + e^{n-1}a + e^n a = eS$$

$$a + ea + e^2a + \ldots\ldots + e^{n-1}a = S$$

$$e^n a - a = eS - S$$

also

$$(e^n - 1) . a = (e - 1) . S$$

welches die zweite hierher gehörige Gleichung ist.

§. 88.

Aus 3 von den 5 Bestimmungsstücken, a, u, n, e, S die beiden übrigen zu finden.

Aufl. I. Aus a, e, n wird (§. 87.).

1) $u = e^{n-1} a$

2) $S = \frac{(e^n - 1) . a}{e - 1}$

II. Aus a, e, u

nach I, 1

$$e^{n-1} = \frac{u}{a}; \quad (n - 1) . \log. e = l. u - l. a$$

also

1) $n = \frac{l. u - l. a}{l. e}$

und aus (I.) wo der Zähler $= e^n a - a$

$= ue - a$ ist

2) $S = \frac{ue - a}{e - 1}$

III. Aus a, e, S

aus I, 2

$$1)\ n = \frac{l.\ ((e-1).\ S + a) - l.\ a}{l.\ e}$$

$$2)\ u = \frac{(e-1).\ S + a}{e}$$

IV. Aus a, u, S

aus II, 2

$$1)\ e = \frac{S-a}{S-u} \quad \ldots$$

$$2)\ u = \frac{l.\ u - l.\ a}{l.\ (S-a) - l.\ (S-u)} + i \text{ (II, 1; IV, 1.)}$$

V. Aus a, u, n

$$1)\ e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} \text{ (I, 1.)}$$

$$2)\ S = \frac{\left(u \cdot \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}\right) - a}{\left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}\right) - 1} \text{ (II, 2; V, 1.)}$$

VI. Aus u, e, n

$$1)\ a = \frac{u}{e^{n-1}} \text{ (I, 1.)}$$

$$2)\ S = \frac{ue - \frac{u}{e^{n-1}}}{e-1} \text{ (II, 2; VI, 1.)}$$

VII. Aus e, n, S

$$1)\ a = \frac{(e-1).\ S}{e^{n}-1} \text{ (I, 2.)}$$

$$2)\ u = \frac{e^{n-1}.\ (e-1).\ S}{e^{n}-1} \text{ (VII, 1.)}$$

VIII. Aus e, u, S

1) $a = S + (u - S) . e$ (II, 2.)

2) $n = \frac{l.u - l.(ue - Se + S)}{le} + 1$ (II, 1; VIII, 1).

Die Auflösung der Aufgaben

IX. Aus a, n, S .... die u und e
X. Aus u, n, S .... die a und e } zu finden

hängt mit der allgemeinen Auflösung der Gleichung

$$x^m + x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots - S = 0$$

zusammen, welche, wie wir aus dem vorhergehenden wissen, die Analysis nicht zu geben vermag.

Anm. Ist e eine ganze Zahl, so dient uns IV, 1 blos aus u und S den Werth von e und a zu finden. Es ist nämlich

$$e = \frac{S}{S - u} - \frac{a}{S - u}$$

also

$$\frac{S}{S - u} = e + \frac{a}{S - u}$$

Wird also S mit S — u dividirt, so giebt der Quotient den Werth von e, und der Rest, welcher bei der Division bleibt, ist a.

Ex. Es sey $S = 2669\frac{1}{3}$, $u = 1782$, so giebt die Division

$887\frac{1}{3} \mid 2669\frac{1}{3} (3 = e$
2662
$7\frac{1}{3} = a$

Die Reihe ist also

$7\frac{1}{3} + 22 + 66 + 198 + 594 + 1782 = 2669\frac{1}{3}$

Ist e eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruche, so kann man nicht wissen, wieviel von dem Bruch, welchen der bei der Division bleibende Rest bildet, noch zu e genom-

men werden muß. Wenn inzwischen der im Werthe von e noch angehängte Bruch vollständig durch einen Decimalbruch ausgedruckt werden kann, so giebt die Division doch auch in diesem Fall den Werth von e vollständig.

Ex. Es sey $S = 8386,40625$; $u = 6862,9687$ also $S - u = 1523,4375$; so giebt die Division

$$\frac{S}{S-u} = 5,5\ldots$$

Läßt man es bei der ersten Decimalstelle, so daß man e $= 5,5$ nimmt, so ist der bei der Division noch bleibende Rest $= 7,5$ wie sich auch durch (VIII, 1) ergiebt.

Zur Probe dient nun noch, wenn u, n und S gegeben sind, daß nach (I, 1) $\frac{l.\,u - l.\,a}{l.\,e} + 1 = n$ seyn muß.

Uebrigens versteht sich, daß bei allen vorstehenden Aufgaben n eine ganze Zahl seyn müsse.

§. 88.

Die Kenntniß der geometrischen Reihen findet in unzähligen Fällen ihre Anwendung, und ist für die politische Arithmetik von größter Wichtigkeit. Hier nur einige Anwendungen.

1. Ein gegenwärtiges Kapital K zu 5 p. C. ausgeliehen, wächst im 1ten Jahre um $\frac{1}{20}$ oder verwandelt sich mit dem Ende des 1ten Jahres in $\frac{21}{20}$. K. Wird solches sammt den Zinsen im 2ten Jahre wieder zu 5 p. C. benutzt, so hat man am Ende des 2ten Jahres $\frac{21}{20} \cdot \left(\frac{21}{20}\,K\right)$ oder $\left(\frac{21}{20}\right)^2 K$, u. s. f; am Ende des nten Jahres $\left(\frac{21}{20}\right)^n . K$

Bei 4 p. C. hätte man am Ende des nten Jahres $\left(\frac{26}{25}\right)^n$. K.

Setzt man überhaupt den Vergrösserungsexponent = e, und den Werth des nach n Jahren auf solche Weise durch die Zinsen von Zinsen entstandenen Kapitals = W, so hat man *)

XLVIII. $W = e^n . K$

Man sieht, daß diese Bestimmung für alle veränderliche Grösßen gilt, die von Jahr zu Jahr nach einem bestimmten geometrischen Verhältnisse zu= (oder auch ab=) nehmen.

Zu wieviel Jahren aus K die W werde, wenn der Vergrösserungsexponent e ist, zeigt die Formel

XLIX. $n = \frac{\log. W - \log. K}{\log. e}$

Ist insbesondere von der Zeit der Verdoppelung die Rede, also $W = 2K$, und $\log. W - \log. K = \log. 2$, so hat man

L. $n = \frac{\log. 2}{\log. e} = \frac{0,3010300}{\log. e}$

2. Die jetzige Volksmenge in einem Staate sey = K, die Anzahl der jährlich sterbenden = $\frac{1}{p}$. K, die der jährlich gebohrnen = $\frac{1}{g}$. K, so hat man am Ende des 1ten Jahres $K + \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{p}\right) . K = \frac{pg + p - g}{pg} . K$; also $e = \frac{pg + p - g}{pg}$, und für die Zeit der Verdoppelung der Volksmenge

---

*) Ich zähle im Nummeriren der Formeln die vorstehenden 18 mit zu den vorhergehenden 29, daher jetzt die 48ste folgt.

$$\text{LI. } n = \frac{0{,}3010300}{l.(pg + p - g) - l.pg}$$

Die neuesten Angaben geben für England nur $n = 112$ Jahre, da für andere Länder $4 = 5 = 600$ Jahre erfordert werden. Ein einziger Würgengel wie der Bösewicht in St. Helena kann n um Jahrhunderte vergrössern.

3. Fällt mir von jetzt an nach 11 Jahren eine ewige Revenüe jährlich $= b$ zu, so ist es so gut, als fiele mir nach $11 - 1$ oder 10 Jahren ein Kapital W zu, das die Zinsen b einbrächte; dann ist aber $b = (e - 1).W$, also $W = \frac{b}{e-1}$, und nun aus (XLVIII)

$$\frac{b}{e-1} = e^{10}.K$$

Fällt mir also jene ewige Revenüe überhaupt nach n Jahren zu, so ist

$$\frac{b}{e-1} = e^{n-1}.K$$

und der gegenwärtige Kapitalwerth jener ewigen Revenüe

$$\text{LII. } K = \frac{b}{(e-1).e^{n-1}}$$

4. Das Kapital W, welches aus einem gegenwärtigen K am Ende des nten Jahres entsteht, wenn alljährlich von dem entstandenen Kapital die unveränderliche Summe b weggenommen wird, ist

$$W = e^{n}.K - (1 + e + e^{2} + e^{3} \ldots + e^{n-1}).b$$

oder

$$\text{LII. } W = e^{n}.K - \frac{e^{n}-1}{e-1}.b$$

Man muß jede solche Gleichung als Fundamentalgleichung zwischen den darin vorkommenden Größen betrachten, aus

der sich z. B. auch K finden läßt, wenn W gegeben ist, oder n wenn die übrigen Stücke gegeben sind u. s. w.

Es kann auch b so groß genommen werden, daß nach n Jahren nichts mehr übrig oder $W = 0$ ist. Für diesen Fall wird aus (LIII.) $e^n K = \frac{e^n - 1}{e - 1} . b$, also

$$\text{LIV.} \quad K = \frac{e^n - 1}{e^n . (e - 1)} . b$$

So groß müßte also das gegenwärtige Kapital K seyn, um bei einem alljährlichen Aufwande b, n Jahre lang damit auszukommen.

Auch wird für diese Bedingung

$$\text{LV.} \quad b = \frac{(e - 1) . e^n}{e^n - 1} . K$$

Soviel dürfte die jährliche Verwendung betragen, um ein Kapital K innerhalb n Jahren ganz zu erschöpfen.

Die Formel (LV) beantwortet also auch die Frage: Wieviel muß alljährlich abgetragen werden, um ein aufgenommenes Kapital K innerhalb n Jahren ganz sammt den Zinsen abzutragen? vorausgesetzt, daß gleich am Ende des 1ten Jahres nach Aufnahme des Kapitals mit dem Abtragen angefangen wird.

5. Fällt mir nach N Jahren (d. h. am Ende des Nten Jahres) ein Kapital W zu, wovon ich nach n Jahren einen Theil w zurückgeben soll, so giebt sich der gegenwärtige Werth K von allem, was mir zufällt, durch

$$\text{LVI.} \quad K = \frac{e^n W - w}{e^{N+n}}$$

woraus sich jede andere, als die Unbekannte betrachtet, finden läßt, z. B.

$$\text{LVII.} \quad n = \frac{\log. w - \log. (W - e^{N} . K)}{\log. e} \text{ *)}$$

6. Eine vorzügliche Gelegenheit zum Gebrauch vorstehender Sätze giebt uns der antichretische Vertrag (pactum antichreticum), nach welchem man gegen ein gewisses Kapital K, das nicht wieder zurückgegeben werden soll, einem Andern den Genuß eines nutzbaren Pfandes so lange überläßt, bis derselbe durch den größeren Ertrag des Guts gegen das erwähnte Kapital mit allen Zinsen vollkommen entschädigt ist. Der jährliche reine Ertrag des Guts sey b, so ist sein Werth $W = \frac{b}{e - 1}$; Soll nun dieses Gut W dem, der ein Kapital K vorschießt, am Ende des Nten Jahres nach geschehenem Vorschusse zur Benutzung übergeben werden, so daß der Ertrag b am Ende des $N + 1$ten Jahres zum erstenmal in Anschlag kommt, so giebt sich die Anzahl von Jahren n, wie lang der Kreditor das Gut benutzen darf, durch die folgende Formel

$$n = \frac{\log. W - \log. (W - e^{N} . K)}{\log. e}$$

weil in (LVII) $w = W$ wird, indem nach $N + n$ Jahren das ganze W zurückgegeben werden soll. Also

---

*) Die Anwendungen von vorgetragenen allgemeinen Lehren der Analysis kann ich nicht wieder so umständlich auseinander setzen, als jene Lehren selbst; das hieße jene Lehren zehen, und zwanzigmal wiederholen. Sie sollen nur den Nutzen vorgetragener allgemeiner Sätze vor Augen legen, und dem Leser Gelegenheit zu Uebungen in dergleichen Berechnungen geben.

$$\text{LVIII. } n = \frac{\log. b - \log. (b - (e-1).\, e^{N} K)}{\log. e}$$

woraus sich nun auch K finden läßt, wenn alle übrige Stücke gegeben sind.

7. Es ist mir eine Rente R angewiesen, die ich nach n Jahren zum 1ten mal, nach n + n' Jahren zum 2ten mal, nach n + n' Jahren zum 3ten mal u. s. f. benutzen soll. Wie hoch läßt sich diese Rente, im Durchschnitt genommen, alljährlich anschlagen, wenn sie m mal ausbezahlt werden soll? Die bisherigen Berechnungen geben

$$\text{LIX. } b = \frac{(e-1).\,(e^{m\,n'} - 1).\,R}{(e^{n+(m-1).\,n'} - 1).\,(e^{n'} - 1)}$$

Anm. Auf diesen blos aus der Natur der geometrischen Reihen abgeleiteten Formeln beruhen noch manche wichtige juristische Berechnungen, wobei ich mich hier nicht aufhalten kann. S. m. Arithmetische Abhandlungen über juristische staats- und forstwirthschaftliche Fragen ꝛc. Heidelb. 1810. Zuweilen ist n eine Zahl, die aus der Erfahrung als Mittelzahl von Beobachtungen angenommen werden muß. Besonders gehören alle die Fragen hierher, welche sich auf das Alter beziehen, welches Menschen von bestimmtem Alter im Durchschnitt genommen erreichen werden. Ich will hierüber nur die mir dort entgangene Bemerkung beifügen, daß für Menschen vom 10ten bis zum 60sten Jahre das zu erreichende Alter von 52 (beim 10jährigen) bis zu 72 (beim 60jährigen) angenommen werden kann. Auch ergeben die Mortalitätstafeln, daß diese Zunahme von von 20 Jahren für die 51 Jahre (vom 10ten bis zum 60sten) genau genug nach einer arithmetischen

Reihe fortschreitet, für welche $a = 52$, $u = 72$ und $n = 51$ ist. Hieraus folgt $d = \frac{72 - 52}{51 - 1} = 0{,}4$ (§. 86. IX, 2), also das zu erreichende Lebensalter von jedem $10 + m$ jährigen $= 52 + m \cdot 0{,}4$. Z. B. Hundert 25 ($= 10 + 15$) jährige haben zusammen 2500 Jahre; sie erreichen aber alle zusammen $100 \cdot (52 + 15 \cdot 0{,}4) = 5800$ Jahre, folglich werden sie zusammen noch $5800 - 2500 =$ 3300 Jahre durchleben.

Für Rentenirer nimmt man zur Sicherheit der Kasse $\frac{1}{5}$ mehr d. h. $52 + 0{,}48 \cdot m$ statt $52 + 0{,}4 \cdot m$. Hiernach erreichen in vorstehendem Falle 100. 25jährige zusammen ein Alter von $100 \cdot (52 + 15 \cdot 0{,}48) = 5920$ Jahren, es kommen also für ihr noch übriges Leben $5920 - 2500 = 3420$ Jahre in Rechnung.

Eilftes Kapitel.

Von den figurirten Zahlen und daraus abgeleiteten Reihen.

§. 89.

Durch Summirung der Glieder einer arithmetischen Reihe erhält man Glieder einer neuen Reihe, welche figurirte Zahlen genennt werden.

Z. B. Die arithmetische Reihe sey

1 2 3 4 5 6 7 8 9 . . . .

so geben die Summen 1, $1+2$, $1+2+3$ u. s. f. die nachstehende Reihe figurirter Zahlen

1 3 6 10 15 21 28 36 45 . . . .

Die Glieder dieser Reihe aufs Neue summirt, giebt 1, $1+3$, $1+3+6$ u. s. f. oder die neue Reihe figurirter Zahlen

1 4 10 20 35 56 . . . .

woraus sich auf gleiche Weise die neue

1 5 15 35 70 126 . . . .

ergiebt.

Die aus der ersten arithmetischen Reihe unmittelbar abgeleiteten Zahlen 1, 3, 6, 10 . . . heißen insbesondere Trigonalzahlen.

Die aus der arithmetischen Reihe

1 3 5 7 9 11 . . . .

entstehenden figurirten Zahlen

1 4 9 16 25 36 . . . . .

heißen Tetragonalzahlen. Ebenso erhält man aus den arithmetischen Reihen

1 4 7 10 13 16 . . . .
1 5 9 13 17 21 . . . . .

u. s. f.

die Pentagonalzahlen

1 5 12 22 35 51 . . . . .

die Hexagonalzahlen

1 6 15 28 45 66 . . . .

u. s. f.

Die aus den Trigonalzahlen, Tetragonalzahlen u. s. f. aufs neue durch Summirungen abgeleiteten figurirten Zahlen können Trigonalzahlen, Tetragonalzahlen u. s. f. der 2ten 3ten 4ten ꝛc. Ordnung genannt werden. Z. B.

1 3 6 10 15 21 . . . . Trig. Z. d. 1ten Ordn.
1 4 10 20 35 56 . . . . Tr. Z. d. 2ten Ordn.
1 5 15 35 70 126 . . . . Tr. Z. d. 3ten Ordn.

Ebenso

1 4 16 25 36 49 . . . . Tetr. Z. d. 1. Ordn.
1 5 21 46 82 131 . . . . Tetr. Z. d. 2. Ordn.
1 6 27 73 155 286 . . . . Tetr. Z. d. 3. Ordn.

u. s. f.

§. 90.

Ordnen wir die Trigonalzahlen der 1ten und höherer Ordnungen mit denen aus welchen sie entstehen, in lothrechten Reihen, daß also in jeder solcher Reihe die Anzahl der Glieder von oben herab gezählt wird, wobei die mit o bezeichneten mit gezählt werden, so erhält man folgende Reihe:

Zahl der Glieder	Zahl der Reihen.											
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
I.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
II.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
III.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IV.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
V.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
VI.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
VII.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
VIII.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
IX.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
X.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
XI.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
XII.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
etc.				etc.				etc.				

Das nte Glied der mten lothrechten Reihe (die Nullen von oben herab mitgezählt) ist gegeben; man soll die Summe aller n Glieder dieser Reihe finden.

Aufl. 1. Die 1te lothrechte Reihe enthält in jedem Gliede die 1; in Bezug auf diese Reihe ist auch $m = 1$. Verlangt man nun z. B. die Summe von 8 Gliedern dieser Reihe, so ist (n, u, S wie bisher verstanden) $S = 8 . 1 = \frac{n}{m} . u$; also auch

$$m : 1 = nu : S$$

Wir wollen nun untersuchen, ob der Ausdruck $S = \frac{n}{m} . u$ auch für die IIte Reihe gelten könne? Wir suchen z. B. die Summe von 7 Gliedern. Hier ist $n = 7$, $u = 6$, $m = 2$; nach dem gedachten allgemeinen Ausdruck wäre also $S = \frac{7}{2} . 6 = 21$; welches wieder mit der wirklichen Summe zusammenstimmt. Aber diese Zusammenstimmung für die 2te Reihe folgt auch schon aus der Lehre von der arithmetischen Reihe. Denn es ist $S = \frac{1}{2} n . u$; weil nun hier $m = 2$ ist, so hat man auch $S = \frac{n}{m} . u$. Macht man denselben Versuch mit irgend einer anderen lothrechten Reihe, so findet man allemal $S = \frac{n}{m} . u$. Inzwischen ist es doch nöthig, die Allgemeinheit der Formel $S = \frac{n}{m} . u$ darzuthun.

2. Allgemein lassen sich zwei auf einander folgende Reihen, die mte und m + 1te so ausdrucken

mte	m + 1te
a	o
b	$\alpha = a$
c	$\beta = a + b$
d	$\gamma = a + b + c$

e $\delta = a + b + c + d$
f $\varepsilon = a + b + c + d + e$
etc. $\zeta = a + b + c + d + e + f$
etc. etc.

Diese Darstellung giebt uns blos die Forderung zu erkennen, wie jede Reihe aus der nächstvorhergehenden abgeleitet werden soll. Es ist nämlich Voraussetzung der Aufgabe, daß in jeder Reihe jedes Glied die Summe aller vorhergehenden Glieder der vorhergehenden Reihe seyn solle.

3. Wir haben No. 1. gesehen, daß die Gleichung $\frac{n}{m} \cdot u$ für die beiden ersten Reihen richtig ist. Jetzt soll nun gezeigt werden, daß dieselbe Formel, wofern sie für irgend eine Reihe gilt, auch nothwendig für die folgende gelten müsse.

Weil wir nun die Glieder irgend einer mten Reihe No. 2. durch a, b, c, d, e, f . . . . ausgedruckt haben, so sey f das nte Glied der mten Reihe; dieses statt u gesetzt, giebt dann

$$S = \frac{n}{m} f \text{ also } m = \frac{nf}{S}$$

Aber S bezeichnet die Summe aller n Glieder dieser Reihe, also

$$m = \frac{n \cdot f}{a + b + c \ldots + f}$$

Das nach f in der folgenden Reihe stehende Glied ζ soll nun die Summe aller Glieder der vorhergehenden Reihe von a bis f enthalten; da nun dieses die Summe aller vorhergehenden Glieder der vorhergehenden Reihe ausdrucken soll, nämlich $a + b + c \ldots + e$, deren Anzahl um 1 kleiner ist, als die von a bis f, so hat man aus gleichem Grunde

$$, = \frac{(n - 1) \cdot e}{m}$$

und wieder aus demselben Grunde

$$\delta = \frac{(n-2).d}{m}; \quad \gamma = \frac{(n-3).c}{m} \text{ u. s. f.}$$

Addirt man nun sämmtliche Werthe von ζ bis zu α, so erhält man

$$\zeta + \varepsilon + \delta + \gamma + \alpha + \beta = \frac{nf}{m} + \frac{(n-1).e}{m}$$
$$+ \frac{(n-2).d}{m} + \frac{(n-3).c}{m} + \frac{(n-4).b}{m} + \frac{(n-5).a}{m}$$
$$= \frac{1}{m}.\big(nf + (n-1).e + (n-2).d + (n-3).c$$
$$+ (n-4).b + (n-5).a\big)$$
$$= \frac{1}{m}.\big(nf + ne - e + nd - 2d + nc - 3c$$
$$+ nb - 4b + na - 5a\big)$$
$$= \frac{1}{m}.\big(n.(f+e+d+c+b+a) - (e+2d)$$
$$+ 3c + 4b + 5a)\big)$$

Es ist aber $a + b + c + d + e + f = \zeta$, und indem wir die Werthe von $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ zusammen addiren,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 5a + 4b + 3c + 2d + e$$

Demnach

$$\zeta + \varepsilon + \delta + \gamma + \beta + \alpha = \frac{1}{m}.\big(n\zeta - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)\big)$$

oder

$$m\zeta + m(\varepsilon + \delta + \gamma + \beta + \alpha) = n\zeta - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

also

$$(m+1).(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = (n-m).\zeta$$

und

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \frac{n-m}{m+1}.\zeta \quad (\odot$$

Wird auf beiden Seiten noch das folgende Glied ζ addirt, so hat man

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \zeta = \left(\frac{n-m}{m+1} + 1\right) \cdot \zeta$$

$$= \frac{n+1}{m+1} \cdot \zeta \quad (\text{h}$$

Man sieht hieraus, wie die Summe aller Glieder der $m+1$ten Reihe von α bis ζ d. h. die Summe von $n+1$ Gliedern der $m+1$ten Reihe blos durch das $n+1$te Glied ζ dieser Reihe bestimmt wird.

4. Ist also die Summe von n Gliedern der $m$ten Reihe $= \frac{n}{m} \cdot f$, wo f ihr letztes Glied bedeutet, so ist die Summe von $n+1$ Gliedern der $m+1$ten Reihe, wenn ihr letztes Glied ζ heißt, $= \frac{n+1}{m+1} \cdot \zeta$; nun gilt jenes von der 1ten Reihe, also auch dieses von der 2ten.

Ebendarum ist also die Summe der $m+2$ten Reihe, deren letztes Glied y heißen mag, und die nun aus $n+2$ Gliedern besteht, $= \frac{(n+1)+1}{(m+1)+1} \cdot y$ oder $\frac{n+2}{m+2} \cdot y$.

Und überhaupt, wenn die Summe von N Gliedern der Mten Reihe, deren Ntes Glied u heißt, mit S bezeichnet wird, so ist hiernach

$$S = \frac{N}{M} \cdot u$$

5. Das $n+1$te Glied irgend einer Reihe ist die Summe von n Gliedern der nächstvorhergehenden Reihe. Daher läßt sich u aus vorstehender Gleichung leicht durch gegebene Größen allgemein ausdrucken. Wenn die $m+1$te Reihe die IIte seyn soll, so ist $m = 1$, und wenn nun s'' die Summe von n Gliedern dieser Reihe seyn soll, so

giebt die allgemeine Gleichung $S'' = \frac{n - m}{m + 1} \cdot \zeta$ in diesem Falle $S'' = \frac{n - 1}{n + 1} \cdot \zeta$, wo ζ das $n + 1$te Glied dieser IIten Reihe bezeichnet; dieses Glied ist aber $= n$, also

$$S' = \frac{n - 1}{2} \cdot n \text{ oder } = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Verlangt man nunmehr die Summe von n Gliedern der IIIten Reihe, so daß jetzt $m + 1 = 3$ seyn soll, so ist $m + 1 = 3$, $m = 2$, also wenn diese Summe mit S''' bezeichnet wird,

$$S''' = \frac{n - 2}{2 + 1} \cdot \zeta$$

wo ζ das $n + 1$te Glied dieser IIIten Reihe, also $= S''$ ist; daher

$$S''' = \frac{n - 2}{3} \cdot S''$$

$$= \frac{n - 2}{3} \cdot \frac{n \cdot (n - 1)}{2} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)}{2 \cdot 3}$$

Auf gleiche Weise wird für die Summe von n Gliedern der IVten Reihe

$$S^{IV} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

und allgemein für die Summe von p Gliedern der rten Reihe

$$S = \frac{p \cdot (p - 1) \cdot (p - 2) \cdot (p - 3) \ldots\ldots (p - (r - 1))}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots r}$$

6. In der rten Reihe sind die ersten $r - 1$ Glieder $= 0$, sie hat also nur $p - (r - 1)$ oder $p + 1 - r$ wirkliche Glieder, wenn die 1 für das 1te genommen wird.

Soll also n die wirkliche Anzahl der Glieder ausdrucken, die nicht mit o sondern mit 1 anfangen, so ist

$$n = p + 1 - r$$

und

$$p = n + r - 1$$

Man hat also für die Summe S der aus n wirklichen Gliedern bestehenden rten Reihe

LIX. $$S = \frac{(r+n-1).(r+n-2).....n}{2 \quad . \quad 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r}$$

§. 91.

Es seyen K, L, M, N, O . . . Glieder einer Reihe, (die hier Hauptreihe heißen kann), welche nicht selbst figurirte Zahlen seyn müssen, so bilden ihre Differenzen die Ite Differenzreihe; die Differenzen der Glieder dieser Iten D. R. bilden eine IIte D. R. u. s. f. Dann lassen sich aus den ersten Gliedern der Differenzreihen alle Glieder der Hauptreihe finden, und es lassen sich mit Zuziehung des vorigen §. allgemeine Ausdrücke für die Summirungen solcher Hauptreihen finden. Darin besteht eigentlich der allgemeine Nutzen der im vorigen §. vorgetragenen Sätze.

Die Ite D. R. enthält die Glieder

L — K, M — L, N — M, O — N etc.

Glieder der IIten D. R. sind

(M — L) — (L — K) = M — 2L + K

(N — M) — (M — L) = N — 2M + L

(O — N) — (N — M) = O — 2N + M

u. s. f.

Dieses giebt folgende Tafel

Haupt-Reihe	Ite Diff. Reihe	IIte Diff. Reihe	IIIte Diff. Reihe	IVte Diff. Reihe.
K				
L	L − K			
M	M − L	M − 2L + K		
N	N − M	N − 2M + L	N − 3M + 3L − K	
O	O − N	O − 2N + M	O − 3N + 3M − L	O − 4N + 6M − 4L + K

Druckt man die ersten Glieder dieser Differenzreihen durch d', d'', d''' etc. aus, so hat man

$$K = K$$
$$d' = L - K$$
$$d'' = M - 2L + K$$
$$d''' = N - 3M + 3L - K$$
$$d^{IV} = O - 4N + 6M - 4L + K$$

und hieraus folgt

$$K = K$$
$$L = K + d'$$
$$M = K + 2d' + d''$$
$$N = K + 3d' + 3d'' + d'''$$
$$O = K + 4d' + 6d'' + 4d''' + d^{IV} \quad \text{u. s. f.}$$

Also die Summe von n Gliedern der Hauptreihe

$$K + L + M + N + O + \text{etc.} = n.K + (1 + 2 + 3 + 4 \ldots).d' + (1 + 3 + 6 \ldots).d'' + (1 + 4 \ldots).d''' + (1 + \ldots).\text{div} + \text{etc.}$$

Die in d' multiplicirte Reihe hat n — 1 Glieder

d'' —— — n — 2 —

d''' —— — n — 3 —

u. s. f.

Die Reihe bricht ab, sobald man auf eine Differenzreihe kommt, deren Glieder gleich groß sind, die also eine neue Differenzreihe gäbe, deren Glieder alle $= 0$ waren. Aus dem vorigen §. erhält man

$$K + L + M + N + O + \text{etc.} = n.K \frac{n.(n-1)}{2}.d' + \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}.d'' + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{2.3.4}.d''' + \text{etc.}$$

Wird $d'' = 0$, und $d'' = d'$, so ist die Summe von n Gliedern

$$= n.K + \frac{3.n.(n-1) + n.(n-1).(n-2)}{2.3}.d'$$

$$= n.K + \frac{n.(n-1).(3+n-2)}{6}.d'$$

$$= n.K + \frac{(n+1).n.(n-2)}{6}.d'$$

§. 92.

Einige Anwendungen.

1. Ex. Man soll die Summe der Quadrate der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden ersten n Zahlen finden.

Die Reihe ist also

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + n^2$$

Dabei ist K = 1, L = 4, M = 9, N = 16 etc. und es wird die gesuchte Summe

$$= n.K + (1 + 2 + 3 \ldots).3 + (1 + 3 + 6 \ldots).2.$$

Die in 3 multiplicirte Reihe hat n — 1 Glieder und ist von der Art der IIten Reihe in der Tafel des §. 90. Ihre Summe ist (§. 90. No. 6.)

$$= \frac{(2 + n - 2).(2 + n - 3)}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$$

Die in 2 multiplicirte Reihe hat n — 2 Glieder. Ihre Summe ist, n — 2 statt n gesetzt,

$$= \frac{(3 + n - 3).(3 + n - 4).(3 + n - 5)}{2.3}$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}$$

und K ist = 1, also die Summe

$$= n + \frac{n.(n-1)}{2}.3 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}.2$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n.(n+1)}{3}.\frac{2n+1}{3}$$

2. Ex. Für die Summirung der Würfel der ersten n ganzen Zahlen hat man

Differenzreihen

K =	1				
L =	8	7 = d′			
M =	27	19	12 = d″		
N =	64	37	18	6 = d‴	0
O =	125	62	24	6	0 = div

Also die Summe von n Gliedern der Hauptreihe

$$= n. + (1 + 2 + 3 \ldots. n-1 \text{ Glieder der IIten Reihe}).7$$

$$+ (1 + 3 + 6 \ldots. n-2 \text{ Glieder der IIIten Reihe}).12$$

$$+ (1 + 4 + 10 \ldots n - 3 \text{ Glieder der 4ten Reihe}) \cdot 6$$

$$= n + \frac{n.(n-1)}{2} \cdot 7 + \frac{(3+n-3).(3+n-4).(3+n-5)}{2 \cdot 3} \cdot 12$$

$$+ \frac{(4+n-4).(4+n-5).(4+n-6).(4+n-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 6$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{(n^2+n)^2}{4}$$

Z. B. Die Summe der Würfeln aller ganzen Zahlen von 1 bis 40 ist $S = \frac{(40^2 + 40)^2}{4} = 672400$.

3. Ex. Für die Reihe

$1.2 + 3.4 + 5.6 + 7.8 + 9.10 + \text{etc.}$

hätte man

$K = 1.2$
$K = 3.4 \quad 5.2 = d'$
$M = 5.6 \quad 9.2 \quad 4.2 = d''$
$N = 7.8 \quad 13.2 \quad 4.2 \quad 0 = d'''$
$O = 9.10 \quad 17.2 \quad 4.2 \quad 0$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Die ersten Glieder der Differenzreihen sind also

$d' = 10; \quad d'' = 8; \quad d''' = 0$

und daher die Summe von n Gliedern =

$$n.2 + (1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n - 1).10 + (1 + 3 + 6 \ldots\ldots + n - 2).8$$

und nach gehöriger Reduktion

$$S = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{3}$$

Z. B. Für $n = 5$ wird $S = 190$

4. Ex. Auf gleiche Weise findet man für die Summe von n Gliedern der Reihe

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + \text{etc.}$$

$d' = 4$, $d'' = 2$, $d''' = 0$ also

$$S = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$$

5. Ex. Die Summe der Reihe.

$$\frac{1}{p \cdot (p-1)} + \frac{1}{(p-1) \cdot (p-2)} + \cdots + \frac{1}{(p-q) \cdot (p-q-1)}$$

giebt sich durch

$$S = \frac{1}{p - (q+1)} - \frac{1}{p}$$

Setzt man $p = 7$, $q = 5$, so wird

$$\frac{1}{7 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{7-6} - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

s. m. Salzwerkskunde, 5r Th. S. 76.

6. Ex. Zur Berechnung des kubischen Inhalts K eines Kugelabschnitts von der Höhe h, wenn der Durchmesser = D ist.

Man kann sich den Kugelabschnitt aus unendlich dünnen über einander liegenden cylindrischen Schichten gebildet denken, so daß ihre Anzahl = h, und die Anzahl aller Schichten für die ganze Kugel = a ist. Zählen wir die Schichten von einem Punkte in der äußeren Kugelfläche nach dem Mittelpunkte, und bezeichnen irgend eine unbestimmte Anzahl solcher Schichten mit x, die Dicke dieser Schichte = 1, so ist der allgemeine Ausdruck für den kubischen Inhalt einer solchen Schichte $\pi \cdot (ax - x^2)$ wo π die bekannte Zahl 3,141 .... ist.

Demnach der kubische Inhalt von x solchen Schichten

$$= \pi a.1 - \left\{ \begin{array}{l} + \pi a.2 \\ + \pi a.3 \\ \quad \vdots \\ + \pi a.x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \pi.1 \\ + \pi.4 \\ + \pi.9 \\ \quad \vdots \\ + \pi.x^2 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \pi a.\frac{1}{2}x(x+1) \\ - \frac{x.(x+1)}{2}.\frac{(2x+1)}{3}.\pi \end{array} \right.$$

nach dem 1. Ex.

$$= \pi.(\tfrac{1}{2}a.(x^2+x) - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{6}(x^2-x))$$

Je größer x genommen wird, einen desto geringeren aliquoten Theil macht x von x^2, und so auch x^2 von x^3 und von ax^2 aus. Weil wir nun hier x unendlich groß nehmen müssen, so verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in den einfacheren

$$\pi x^2 . (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}x)$$

Es ist aber die Summe von x Schichtenhöhen mit der ganzen Höhe h einerlei, und so auch die Höhe von a Schichtenhöhen einerlei mit dem Durchmesser der Kugel, also allgemein

$$K = \pi h^2 . (\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{3}h)$$

und dieses giebt für die ganze Kugel, wo $h = D$ ist,

$$K = \tfrac{2}{3} D . \pi . r^2$$

indem wir r statt $\frac{1}{2}D$ schreiben.

7. Ex. Für den kubischen Inhalt des Kegels erhält man auf ganz ähnliche Weise

$$K = \pi . r^2 . \tfrac{1}{3} h$$

wenn r den Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Kegels bezeichnet.

Für jede Höhe x, von der Spitze herab gemessen, hat man nämlich den kubischen Inhalt $= \pi . \frac{r^2}{h^2} . x^2$, wo man sich unter x wie vorhin die Anzahl unter einander liegender Schichten denken kann. Man erhält hiernach

$$K = \frac{\pi r^2}{h^2} . (1 + 4 + 9 + 16 . . . + h^2)$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h \cdot (h+1) \cdot (2h+1)}{6}$$

wo h eine unendliche Anzahl von Schichten bezeichnet, also $h \cdot (h+1) \cdot 2h = 2h^3$ wird. Demnach

$$K = \frac{\pi r^2 \cdot 2h^3}{6 \cdot h^2} = \tfrac{1}{3} h \cdot \pi r^2$$

Anm. So mannichfaltig auch die Formen von Reihen sind, auf welche wir hier die gefundene allgemeine Summirungsformel angewendet haben, so schwierig kann doch ihre Anwendung in einzelnen Fällen werden. Z. B. in der Anwendung auf die Reihe

$$\frac{1}{p \cdot (p+q)} + \frac{1}{(p+2q) \cdot (p+3q)} + \frac{1}{(p+4q) \cdot (p+5q)} + \text{&c.}$$

Die königl. Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen hatte im Jahr 1813 die Summirung dieser Reihe zum Gegenstande ihrer mathematischen Preisaufgabe gewählt.

§. 93.

Weil die Summe von n Gliedern der Hauptreihe $K + L + M + N + O + \text{etc.} = n \cdot K + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot d' + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3} \cdot d'' + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot d''' + \text{etc.}$ ist; also die Summe von $(n-1)$ Gliedern der Hauptreihe $= (n-1) \cdot K + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d' + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3} \cdot d'' + \text{etc.}$ so ergiebt sich durch die Subtraktion das nte Glied der Hauptreihe $=$

$$K + \frac{n \cdot (n-1) - (n-1) \cdot (n-2)}{2} \cdot d'$$

$$+\frac{n.(n-1).(n-2)-(n-1).(n-2).(n-3)}{2\ .\ 3}.\ d''$$

$$+\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)-(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{2\ .\ 3\ .\ 4}.d'''$$

+ etc.

$$\text{LX.} = K + (n-1).\ d' + \frac{(n-1).\ (n-2)}{2}.\ d''$$

$$+\frac{(n-1).\ (n-2).\ (n-3)}{2\ .\ 3}.\ d''' + \text{etc.}$$

So wird also jedes Glied der Hauptreihe, deren 1stes Glied K ist, aus diesem 1sten Gliede und den ersten Gliedern der Differenzreihen bestimmt.

Ex. Von der Reihe 1 9 25 49 . . . . welche die Quadrate der nach einander folgenden ungeraden Zahlen enthält, das 50ste Glied zu bestimmen. Für diese Reihe findet man $d' = 8$, $d'' = 8$, $d''' = 0$, und das 50ste Glied

$$= 1 + 49 \cdot 8 + \frac{49 \cdot 48}{2} \cdot 8 = 9801$$

In diesem Falle könnte man aber auf kürzerem Wege zu dem Resultate gelangen; denn die 50ste ungerade Zahl ist 99, also das 50ste Glied $= 99^2 = 9801$.

§. 94.

Man kann auch irgend eine willkührliche Reihe von Zahlen als Hauptreihe annehmen, ohne für sie ein bestimmtes Gesetz zum Grunde zu legen, und daraus Summenreihen ableiten, und nun das allgemeine Gesetz aufsuchen, nach welchem die Glieder dieser Summenreihen bestimmt werden.

Ich will die willkührlich angenommene Hauptreihe unter folgender Form ausdrucken

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \ldots A_{n-1}$$

Für jede Summenreihe will ich sechs Glieder hersetzen, so daß jeder neben I, II etc. stehende Ausdruck das sovielte Glied der Summenreihe ausdruckt, als die vorgesetzte Zahl I, II u. s. f. anzeigt.

Hauptreihe	1te Summenreihe.
A_0	I. A_0
A_1	II. $A_0 + A_1$
A_2	III. $A_0 + A_1 + A_2$
A_3	IV. $A_0 + A_1 + A_2 + A_3$
A_4	V. $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
A_5	VI. $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

2te Summenreihe.

I. A_0
II. $2A_0 + A_1$
III. $3A_0 + A_1 + A_2$
IV. $4A_0 + A_1 + A_2 + A_3$
V. $5A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
VI. $6A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

3te Summenreihe.

I. A_0
II. $3A_0 + A_1$
III. $6A_0 + 3A_1 + A_2$
IV. $10A_0 + 6A_1 + 3A_2 + A_3$
V. $15A_0 + 10A_1 + 6A_2 + 3A_3 + A_4$
VI. $21A_0 + 15A_1 + 10A_2 + 6A_3 + 3A_4 + A_5$

u. s. f.

Diese allgemeine Darstellung giebt uns die Gesetze zu erkennen, nach welchen blos aus den Gliedern der Hauptreihe jedes verlangte Glied, von welcher Summenreihe man will, bestimmt wird.

Ex. Die vorgegebene Hauptreihe sey

$$3 + 5 - 2 + 6 - 1 + 8$$

so ist $A_0 = 3$; $A_1 = 5$; $A_2 = -2$; $A_3 = 6$; $A_4 = -1$; $A_5 = 8$. Verlangt man nun z. B. das 4te Glied der 3ten Summenreihe, so wäre solches

$$10.A_0 + 6.A_1 + 3.A_2 + A_3 = 10.3 + 6.5 - 3.2 + 6 = 60$$

Zur Probe dient folgende Rechnung

Hauptreihe	3 +	5 −	2 +	6 −	1 +	8
1te Summenr.	3 +	8 +	6 +	12 +	11 +	19
2te Summenr.	3 +	11 +	17 +	29 +	40 +	59
3te Summenr.	3 +	14 +	31 +	60 +	100 +	159
te Summenr.	3 +	17 +	48 +	108 +	208 +	367

u. s. f.

wo 60 das 4te Glied der 3ten Summenreihe ist.

§. 95.

Schreibt man die Glieder der verschiedenen Summenreihen in umgekehrter Ordnung, so fängt jedes nte Glied mit A_{n-1} an, und es folgen mit Beiseitsetzung der Koëfficienten

$$A_{n-2}\ A_{n-3}\ A_{n-4} \ldots A_2\ A_1\ A_0$$

Die Koëfficientenreihe, welche zu $A_{n-1}\ A_{n-2}\ A_{n-3} \ldots A_1\ A_0$ gehört, ist

für die 1te Summenreihe	1	1	1	...	1	1
2te ———	1	2	3	...	n−1	n
3te ———	1	3	6	...	die n−1te Trig. Zahl der 1ten Ordn.	nte Trig. Zahl der 1ten Ordn.

Allgemein ist das nte Glied der mten Summenreihe

$$1.A_{n-1} + \alpha.A_{n-2} + \beta.A_{n-3} \ldots + \text{n−1te Trig. Zahl der m−2ten Ordnung} + \text{nte Trig. Zahl der m−2ten Ordnung}$$

Auch ist 1 die erste, α die 2te, β die 3te u. s. w. Trigonalzahl der m — 2ten Ordnung.

Es ist also

$$\alpha = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-1)}$$

$$\beta = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots (m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-1)}$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots\ldots (m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (m-1)}$$

u. s. f.

Daher das nte Glied der mten Summenreihe =

$$1.\ A_{n-1} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \frac{m}{} \cdot A_{n-2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot A_{n-3}$$
$$\ldots\ldots + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \ldots\ldots (n+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)} \cdot A_0$$

oder

$$1.\ A_{n-1} + \frac{m}{1} \cdot A_{n-2} + \frac{m \cdot (m+1)}{1 \cdot 2} \cdot A_{n-3} + \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot A_{n-4}$$
$$\ldots\ldots + \frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \ldots\ldots (m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)} \cdot A_0$$

z. B. Das 5te Glied der 4ten Summenreihe im Ex. des vorigen §.

$$= A_4 + 4 \cdot A_3 + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot A_2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot A_1 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot A_0$$

$$= -1 + 4 \cdot 6 - 10 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 35 \cdot 3 = 208$$

wie es auch dort gefunden wird.

Zwölftes Kapitel.

Einige wichtige Entwickelungen in Reihen, auch Umkehrungen derselben.

§. 96.

Jede Potenz eines Polynoms d. h. jede Potenz von der Form

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots)^n$$

durch eine Reihe zu entwickeln.

Auflösung 1. Man setze $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 \ldots\ldots$

Da die Gleichung für alle mögliche Werthe der Größe x gelten soll, also auch für $x = 0$, so hat man allemal $A = a^n$.

Die angenommene Gleichung muß nun auch noch gelten, wenn $x + u$ statt x gesetzt wird. Dann hat man

$$(a + b.(x + u) + c(x + u)^2 + d(x + u)^3 + \ldots.)^n = A + B.(x + u) + C.(x + u)^2 + D.(x + u)^3 + \ldots.$$

2. Ordnet man die Glieder des Ausdrucks zur Linken nach den Potenzen von u, und schreibt die sich ergebenden Reihen unter einander, so erhält man

$$\begin{aligned} &a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} \\ &\quad + bu + 2cxu + 3dx^2u + \text{etc.} \\ &\quad\quad + cu^2 + 3dxu^2 + \text{etc.} \\ &\quad\quad\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

3. Man setze nun

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} &= p \\ b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc.} \\ + eu + 3dxu + \text{etc.} &= q \\ + \text{etc.} \end{aligned}$$

also

$$(a + b.(x+u) + c.(x+n)^2 + d(x+u)^3 + \text{etc.})^n = (p+q)^n$$

so wird

$$(p+qu)^n = \left(p + (b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc.}) + cu + 3dxu + \text{etc.}\right).u\Big)^n.$$

Wir werden sehen, daß wir zu unserem Zwecke die 2te und höhere Potenzen von u bei Seite setzen können; auf diese Weise erhalten wir

$$(p+qu)^n = p^n + np^{n-1}.(b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc.}).u$$

oder

$$(a + b!.(x+u) + c.(x+n)^2 + \text{etc.})^n = (a + bx + cx^2 + \text{etc.})^n + np^{n-1}.(b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc.}).u$$

4. Aber aus (No. 1.) ist die Größe zur Linken in der letzten Gleichung, mit Weglassung der höheren Potenzen von u

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} + (B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.}).u$$

und

$$(a + bx + cx^2 + \text{etc.})^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

also

$$np^{n-1}.(b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc.}) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.}$$

5. Statt p^{n-1} kann man $\frac{p^n}{p}$ setzen; es ist aber

$$p = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

$$p^n = (a + bx + cx^2 + \text{etc.}).(A + Bx + Cx^2 + \text{etc.})$$

also

$$P^{n-1} = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}$$

Es wird daher aus der letzten Gleichung (No. 4.) die folgende

$$n.\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}}{a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}}.(b+2cx+3dx^2+\text{etc.})$$
$$= B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.}$$

oder

$$n.(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}).(b+2cx+3dx^2+\text{etc.})$$
$$= (B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.}).(a+bx+cx^2+\text{etc.})$$

also, indem man auf beiden Seiten wirklich multiplicirt

$$\left.\begin{matrix} nbA \\ +\ 2ncA \end{matrix}\right\}.x + \left.\begin{matrix} nbC \\ +\ 2ncB \\ +\ 3ndA \end{matrix}\right\}.x^2$$

$$+\ nbD \\ +\ 2ncC \\ +\ 3ndB \\ +\ 4neA \Big\}.x^3 + \left.\begin{matrix} nbE \\ +\ 2ncD \\ +\ 3ndB \\ +\ 4neB \\ +\ 5nfA \end{matrix}\right\}.x^4 + \text{etc.}$$

$$= aB + 2aC \\ +\ bB \Big\}.x + \left.\begin{matrix} 3aD \\ +\ 2bC \\ +\ cB \end{matrix}\right\}.x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +\ 4aE \\ +\ 3bD \\ +\ 2cC \\ +\ dB \end{array}\right\} . x^3 \left\{\begin{array}{l} +\ 5aF \\ +\ 4bE \\ +\ 3cD \\ +\ 2dC \\ +\ eB \end{array}\right\} . x^4 + \text{etc.}$$

6. Da die letzte Gleichung (No. 5.) auch noch für $x = 0$ gelten muß, so wird

LXI.
$$\left\{\begin{array}{l} aB = nbA \\ 2aC = (n-1).bB + 2ncA \\ 3aD = (n-2).bC + (2n-1).Bc + 3ndA \\ 4aE = (n-3).bD + (2n-2).cC + (3n-1).dB \\ \qquad\qquad + neA \\ 5aF = (n-4).bE + (2n-3).cD + (3n-2).dC \\ \qquad\qquad + (4n-1).eB + (5nfA \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right.$$

Das Gesetz des Fortgangs ist hier sehr leicht zu bemerken; wollte man die Ausdrücke fortsetzen, so gäbe sich sogleich

$$6.\ aG = (n-5).bF + (2n-4).cE + (3n-3).dD + (4n-2).eC + (5n-1).fB + 6ngA$$

u. s. f.

woraus sich nun, weil $A = a^n$ bekannt ist, die Werthe von B, C, D, E, F, G leicht finden lassen; nämlich

LXII.
$$\left\{\begin{array}{l} B = n a^{n-1} b \\ C = \dfrac{n.(n-1).a^{n-2}b^2}{1.2} + n a^{n-1}.c \\ D = \dfrac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.a^{n-3}b^3 + n.(n-1).a^{n-2}bc + n.a^{n-1}d \\ \text{u. s. f.} \end{array}\right.$$

Das Gesetz, wonach diese Koëfficienten bestimmt werden, ist etwas verwickelter, als das, welches bei den Bestimmungen (LXI) zum Grunde liegt.

Anm. Die von Hindenburg zuerst bearbeitete sogenante Kombinatorische Analysis giebt durch eingeführte bequeme Bezeichnungen besondere Vortheile an die Hand, zu deren Kenntniß das Studium eigener Schriften erfordert wird. Hierhin gehören

Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen, herausgegeben von C. F. Hindenburg, I. u. II. Th. Leipz. 1796 und 1800.

Weingärtner, Lehrbuch der kombinatorischen Analysis, Leipz. 1800.

Grüson, Supplement zu Eulers Differentialrechnung, Berl. 1798.

Stahl, Grundriß der Kombinationslehre, nebst Anwendung derselben auf die Analysis, 1800.

Dess. Einleitung in das Studium der Kombinationslehre, 1801.

De Prasse Usus logarithmorum infinitorum in Theoria aequationum, 1796.

Klügel, Mathemat. Wörterbuch, I. Th. 1803.

Thibaut, Grundriß der allgemeinen Arithmetik oder Analysis, I. Th. 1809.

Der IIte Th. ist nicht erschienen.

§. 97.

Bei Wurzelgrößen ist ein ähnliches Verfahren anwendbar.

Z. B. $\sqrt{\frac{m}{m+x}}$ in eine Reihe aufzulösen.

Die Division giebt

$$\frac{m}{m+x} = 1 - \frac{m}{x} + \frac{x^2}{m^2} - \frac{x^3}{m^3} + \frac{x^4}{m^4} \ldots\ldots$$

Die Wurzel ist also

$$= \left(1 - \frac{x}{m} + \frac{x^2}{m^2} - \frac{x^3}{m^3} + \frac{x^4}{m^4} \ldots\ldots\right)^{\frac{1}{2}}$$

Schreibt man nun dafür

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6 \ldots.$$

und macht hiervon das Quadrat (welches hier durch die Multiplikation mit sich selbst sehr leicht geschieht), so wird

$$1 - \frac{x}{m} + \frac{x^2}{m^2} - \frac{x^3}{m^3} \ldots. = 1 - 2\alpha x + 2\beta x^2 - 2\gamma x^3$$
$$+ \alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta x^3$$
$$+ 2\delta x^4 - 2\varepsilon x^5 + 2\zeta x^6 - \text{etc.}$$
$$+ 2\alpha\gamma x^4 - 2\alpha\delta x^5 + 2\alpha\varepsilon x^6$$
$$+ \beta^2 x^4 - 2\beta\gamma x^5 + 2\beta\delta x^6$$
$$+ \gamma^2 x^6$$

also

$$2\alpha = \frac{1}{m}; \quad \alpha = \frac{1}{2m};$$

$$2\beta + \alpha^2 = \frac{1}{m^2}; \quad \beta = \frac{\frac{1}{m^2} - \alpha^2}{2} = \frac{3}{8 \cdot m^2};$$

$$2\gamma + 2\alpha\beta = \frac{1}{m^3}; \quad \gamma = \frac{\frac{1}{m^3} - \frac{3}{8m^3}}{2} = \frac{5}{16 \cdot m^3}$$

$$2\delta + 2\alpha\gamma + \beta^2 = \frac{1}{m^4}; \text{ giebt } \delta = \frac{35}{128 \cdot m^4}$$

$$2\varepsilon + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma = \frac{1}{m^5}; \quad \varepsilon = \frac{63}{256 \cdot m^5}$$

$$2\zeta + 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2 = \frac{1}{m^6}; \quad \zeta = \frac{329}{1024 \cdot m^6}$$

u. s. f.

Demnach

$$\sqrt{\frac{m}{m+x}} = 1 - \frac{x}{2m} + \frac{3x^2}{8m^2} - \frac{5x^3}{16.m^3} + \frac{35x^4}{128.m^4} - \frac{63x^5}{256.m^5} + \frac{329x^6}{1024.m^6} \ldots\ldots$$

Ist z. B. $m = 10$, $x = 1$, so wird

$$\sqrt{\frac{10}{11}} = 1 - \frac{1}{20} + \frac{3}{800} - \frac{5}{16000} + \frac{35}{1280000} - \frac{63}{25600000} + \frac{329}{10240000000} \ldots.$$

Die obige Reihe läßt sich nun auch auf Wurzeln aus ganzen Zahlen anwenden.

Z. B. $\sqrt{125} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{125}}}$. Man setze nun $m = 11{,}2^2$ $= 125{,}44$ und suche $\sqrt{\frac{125{,}44}{125}}$, so ist $x = -0{,}44$ und

$$\frac{x}{m} = -\frac{44}{12544} = -0{,}00350765, \text{ also}$$

$$\sqrt{\frac{125{,}44}{125}} = 1 + \frac{0{,}00350765}{2} + \frac{3}{8} \cdot 0{,}0035^2 + \text{etc.}$$
$$= 1 + 0{,}00175382 + 0{,}00000459 + \ldots$$
$$= 1{,}00175841$$

Also

$$\sqrt{\frac{1}{125}} = \frac{1{,}00175841}{11{,}2}$$

$$\text{und } \sqrt{125} = \frac{11{,}2}{1{,}00175841}.$$

Man sieht hieraus, wie man sich in solchen Anwendungen zu verhalten hat, damit die Reihe schnell konvergire.

Sollte $\sqrt{1000}$ gesucht werden, so setze man $m = 31{,}6^2$ $= 998{,}56$ und $x = 1{,}44$.

Jetzt suche man $\sqrt{\frac{998,56}{998,56 + 1,44}}$ nach obiger Reihe,

so wird, weil $\frac{x}{m} = 0,001443078 \ldots$

$$\sqrt{\frac{998,56}{998,56 + 1,44}} = 1 - 0,000721539 + 0,0000007777$$
$$= 0,999286238$$

also

$$\sqrt{\frac{1}{1000}} = \frac{0,999286238}{31,6}$$

und

$$\sqrt{1000} = \frac{31,6}{0,999286238}$$

§. 98.

Aus einer Gleichung zwischen zweien Reihen, die nach Potenzen zweier bestimmten Grösen x und y ohne Ende fortgehen, die eine x durch eine Reihe zu bestimmen, die nach Potenzen der anderen y fortgeht; oder aus der Gleichung $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta x^4 \ldots$ die x durch eine Reihe von der Form

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \ldots$$

auszudrucken.

Aufl. 1. Man mache die verschiedenen Potenzen dieses Infinitinomiums, soweit man solche nöthig hat; substituire solche statt der verschiedenen Potenzen von x in der vorgegebenen Gleichung, und setze hiernächst die Summe der zu jeder einzelnen Potenz von y gehörigen Koëfficienten $= 0$, so geben die einzelnen Gleichungen die jetzt noch unbekannten Werthe von A, B, C etc.

2. Es ist aber

$$(Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 \ldots\ldots)^2$$
$$= A^2y^2 + 2ABy^3 + \left.\begin{matrix}2AC\\ +B^2\end{matrix}\right\}\cdot y^4 + \left.\begin{matrix}2AD\\ +2BC\end{matrix}\right\}\cdot y^5$$
$$+\left.\begin{matrix}2AE\\ +2BD\\ +C^2\end{matrix}\right\}\cdot y^6 + \left.\begin{matrix}2AF\\ +2BE\\ +2CD\end{matrix}\right\}\cdot y^7 + \left.\begin{matrix}2AG\\ +2BF\\ +2CE\\ +D^2\end{matrix}\right\}\cdot y^8 + \text{etc.}$$

Dieses mit $Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 +$ etc. aufs Neue multiplicirt, giebt $x^3 =$

$$A^3y^3 + 3A^2By^4 + \left.\begin{matrix}3A^2C\\ +3AB^2\end{matrix}\right\}\cdot y^5 + \left.\begin{matrix}6ABC\\ +A^2D\\ +B^3\end{matrix}\right\}\cdot y^6$$
$$+\left.\begin{matrix}6ABD\\ +3B^2C\\ +3AC^2\\ +3A^2E\end{matrix}\right\}\cdot y^7 + \left.\begin{matrix}6ABE\\ +6ACD\\ +3A^2F\\ +3B^2D\\ +3BC^2\end{matrix}\right\}\cdot y^8 + \text{etc.}$$

Dieses wieder mit $Ay + By^2 +$ etc. multiplicirt, giebt

$$x^4 = A^4y^4 + 4A^3By^5 + \left.\begin{matrix}6A^2B^2\\ +4A^3C\end{matrix}\right\}\cdot y^6 + \left.\begin{matrix}10A^2BC\\ +4AB^2\\ +4A^3D\\ +2ABC\end{matrix}\right\}\cdot y^7$$
$$+\left.\begin{matrix}10AB^2C\\ +6A^2B\\ +6A^2C^2\\ +6A^2BD\\ +4A^3E\\ +2B^2C\\ +B^4\end{matrix}\right\}\cdot y^8 \text{ u. s. f.}$$

3. Werden nun diese Werthe von x, x^2, x^3 etc. in der ursprünglichen Gleichung substituirt, und die so veränderte Gleichung auf o gebracht, so wird

$$\left.\begin{matrix} aA \\ -\alpha \end{matrix}\right\} \cdot y \left.\begin{matrix} +aB \\ +bA^2 \\ -\beta \end{matrix}\right\} \cdot y^2 \left.\begin{matrix} +aC \\ +2bAB \\ +cA^3 \\ -\gamma \end{matrix}\right\} \cdot y^3 \left.\begin{matrix} +aD \\ +2bAC \\ +bB^2 \\ +3cA^2B \\ +dA^2 \\ -\delta \end{matrix}\right\} \cdot y^4$$

$$\left.\begin{matrix} +aE \\ +2bAD \\ +2bBC \\ +3cA^2C \\ +3cAB^2 \\ +4dA^3B \\ +eA^5 \\ +\varepsilon \end{matrix}\right\} \cdot y^5 + \text{etc.} = 0$$

4. Dividirt man nun durchaus mit y, und setzt statt der Koëfficienten von y^2, y^3, y^4 ... die Buchstaben $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ..., so bleibt noch

$$aA - \alpha + \mathfrak{B} \cdot y + \mathfrak{C} \cdot y^2 + \mathfrak{D} \cdot y^3 + \mathfrak{E} \cdot y^4 + \text{etc.} = 0.$$

Und da dieses für alle mögliche Werthe, welche man statt y setzen mag, gelten muß, also auch für $y = 0$, so wird

$$aA - \alpha = 0, \text{ also } A = \frac{\alpha}{a}$$

5. Weil nun $aA - \alpha = 0$, so bleibt auch (No. 4.)

$$\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y^3 + \mathfrak{D}y^4 + \text{etc.} = 0$$

oder, durchaus mit y^2 dividirt,

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D}y^2 + \text{etc.} = 0$$

also, wie No. 4., wieder

$$\mathfrak{B} = 0$$

und so alle Koëfficienten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ ... $= 0$

6. Daher $aB + bA^2 - \beta = 0$

und

$$B = \frac{\beta - BA^2}{a} = \frac{\beta}{a} - \frac{b\alpha^2}{a^3}$$

7. So giebt sich nun C, indem man den Werth von $\mathfrak{C} = 0$ setzt u. s. f.

§. 99.

Setzt man $\alpha = 1$, und die übrigen Koëfficienten β, γ, δ .... $= 0$, so lehrt die vorstehende Aufgabe, wie man aus der Gleichung

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

den Werth von x durch eine Reihe bestimmen soll, die nach Potenzen von y ohne Ende fortgeht.

Man nennt dieses Verfahren die **Umkehrung der Reihen.**

§. 100.

Den einfachen Exponentialausdruck a^x, wo a und x beliebige Zahlen seyn können, in eine Reihe zu entwickeln.

Aufl. Wir setzen

1) $a^x = p + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 \ldots$.

so wird auf gleiche Weise

2) $a^y = p + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 \ldots$.

und so auch

3) $a^{x+y} = p + \alpha(x+y) + \beta(x+y)^2 + \gamma(x+y)^3 + \delta(x+y)^4 + \ldots$.

Es ist aber auch

4) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y = (p + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}) \times (p + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \text{etc.})$

Werden nun diese beiden Werthe von a^{x+y} (No. 3 u. 4.) nach den einzelnen Potenzen von x und y gehörig entwickelt, so erhält man, indem man beide gleich setzt,

$$\begin{aligned}
5.\ & p + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.} \\
& + \alpha y + 2\beta yx + 3\gamma yx^2 + 4\delta yx^3 \\
& + \beta y^2 + 3\gamma y^2 x + 6\delta y^2 x^2 \\
& + \gamma y^3 + 4\delta y^3 x \\
& + \delta y^4 \\
= & p^2 + p\alpha x + p\beta x^2 + p\gamma x^3 + p\delta x^4 + \text{etc.} \\
& + p\alpha y + \alpha^2 yx + \alpha\beta yx^2 + \alpha\gamma yx^3 \\
& + p\beta y^2 + \alpha\beta y^2 x + \beta^2 y^2 x^2 \\
& + d\gamma y^3 + \alpha\gamma y^3 x \\
& + p\delta y^4
\end{aligned}$$

Weil nun alle diese Gleichungen für jeden Werth von x und y, also auch für $x = 0$ und $y = 0$, gelten müssen, so hat man sowohl aus (No. 1.) als aus (No. 2.) $p = a^0 = 1$. Und nun wird aus der vorstehenden Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
& (\alpha - \alpha).\, y + (2\beta - \alpha^2).\, yx + (3\gamma - \alpha\beta).\, yx^2 \\
& + (\beta - \beta).\, y^2 + (3\gamma - \alpha\beta).\, y^2 x \\
& + (\gamma - \gamma).\, y^3 \\
& + (4\delta - \alpha\gamma).\, yx^3 + \text{etc.} \\
& + (6\delta - \beta^2).\, y^2 x^2 \\
& + (4\delta - \alpha\gamma).\, y^3 x \\
& + (\delta - \delta).\, y^4
\end{aligned}\right\} = 0$$

wo das 1te Glied $= 0$ ist. Diese Gleichung bleibt noch richtig, wenn man durchaus mit xy dividirt, und dann sowohl x als $y = 0$ setzt, weil sie für jeden Werth von x und y gelten muß. Hiermit wird sie aber auf den ganz einfachen Ausdruck reducirt

$$2\beta - \alpha^2 = 0.$$

also

$$\alpha^2 = 2\beta \text{ oder } \beta = \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

So sind also die beiden ersten Glieder der Gleichung $= 0$, und es bleiben die folgenden Glieder zusammengenommen auch noch $= 0$.

Dividirt man aufs Neue mit x und setzt dann $x = 0$, so bleibt nur noch

$$(3\gamma - \alpha\beta) . y^2 + (4\delta - \alpha\gamma) . y^3 + \text{etc.} = 0$$

oder, mit y^2 dividirt,

$$3\gamma - \alpha\beta + (4\delta - \alpha) y + \text{etc.} = 0$$

wo in allen folgenden Gliedern y als Faktor vorkommt. Setzt man also $y = 0$, so giebt sich

$$3\gamma - \alpha\beta = 0 \text{ und } \gamma = \frac{\alpha\beta}{3} = \frac{\alpha^3}{2 . 3}$$

wodurch nun das 3te Glied unserer Gleichung gleichfalls $= 0$ wird, und es bleibt jetzt noch die Summe der übrigen Glieder $= 0$. Es wird daher wie vorhin

$$4\delta - \alpha\gamma = 0, \text{ also } \delta = \frac{\alpha\gamma}{4} = \frac{\alpha^4}{2 . 3 . 4}$$

und allgemein

$$\text{der mte Koëfficient} = \frac{\alpha^m}{1 . 2 . 3 . 4 . . . . m} \quad (h$$

Diese Allgemeinheit erhellet aus folgender Betrachtung.

Nimmt man irgend ein unbestimmtes Glied zur Rechten in (No. 5.), aus welcher Zeile man will, so läßt sich solches, den Koëfficient $= K$ gesetzt, allgemein durch $K . y^m x^n$ ausdrucken. Es kann aber das Glied, welches $y^m x^n$ enthält, nur durch Multiplikation derjenigen beiden Glieder (No. 4.) entstehen, wovon das eine y^m und das andere x^n enthält. Bezeichnet also A_m den zu y^m, und A_n den zu x^n gehörigen Koëfficient in (4.), so sind jene Glie-

der $A_n \cdot x^n$ und $A_m \cdot y^m$, und es ist nothwendig

$$K = A_n \cdot A_m$$

Hätte es nun mit dem Ausdruck (h) seine Richtigkeit, so wäre auch

$$A_n = \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}$$

also

$$K = \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n} \cdot \frac{\alpha^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

Betrachtet man nun die Gleichung (5.) auf der linken Seite, so kann jenes Glied $Ky^m x^n$ nur als Glied einer gewissen Potenz von $x + y$ aus (No. 3.) herkommen z. B. als Glied der Potenz $(x + y)^r$. Man weiß aus dem binomischen Lehrsatze, daß jedes Glied einer solchen Potenz ein Produkt wie $y^m x^n$ enthält, so daß allemal $m + n = r$ seyn muß; demnach kann $y^n x^n$ nur als Glied in der Entwickelung von $(y + x)^{m+n}$ vorkommen, und die Gleichung (No. 3.) ergiebt, daß jedes Glied in $(y + x)^{m+n}$ noch mit α oder β oder γ oder überhaupt mit A_{m+n} multiplicirt werden muß, wenn A_{m+n} den $m + n$ten Koëfficient in I oder II bezeichnet. Es ist aber, die Koëfficienten bei Seite gesetzt,

$$(y + x)^{m+n} = y^{m+n} + y^{m+n-1} x + \ldots.$$

$$+ y^m x^n + y^{m-1} x^{n+1} + \ldots.$$

so daß $y^m x^n$ das n + 1te Glied dieser Reihe ist. Der Koëfficient dieses Gliedes ist

$$\frac{(m+n).(m+n-1).(m+n-2)....(m+1)}{1.2.3.....n}$$

also dasjenige Glied (No. 3.), welches $y^m x^n$ enthält,

$$= \frac{(m+n).(m+n-1).(m+n-2)...(m+1)}{1.2.3.....n} . A_{m+n} . y^m x^n$$

Wender man hier (h) an, so wird

$$K \text{ oder } A_{m+n} = \frac{\alpha^{m+n}}{1.2.3....(m+n)}$$

und der vorstehende Ausdruck =

$$\frac{(m+1).(m+2).(m+3).(m+4)....(m+n)}{1.2.3.4.....n} \times \frac{\alpha^{m+n}}{1.2.3.4....m.(m+1).(m+2)....(m+n)} . y^m x^n$$

$$= \frac{\alpha^{m+n}}{1.2.3.4....n \times 1.2.3.4....m} . y^m x^n$$

Dieser Werth stimmt nun mit dem vorigen ganz überein, Man hat also

$$6.\ a^x = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha^2}{1.2} . x^2 + \frac{\alpha^3}{1.2.3} x^3 + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} . x^4 + \text{etc.}$$

Diese Gleichung enthält für jetzt noch 3 unbestimmte Grössen, a, α und x. Wir können für α eine beliebige bestimmte Zahl setzen, und der Gleichung kann dann immer noch Genüge geschehen. Am bequemsten setzt man $\alpha = 1$, und dieses giebt

$$7.\ a^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wo es allemal einen bestimmten Werth von a giebt, welcher einem beliebigen Werthe von x Genüge thut. Man kann also auch α statt x schreiben, und es bleibt noch

$$a^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

was auch α für einen Werth haben mag; nur erhält a nothwendig verschiedene Werthe nach Verschiedenheit der Werthe von α.

Behalten wir die einfache Voraussetzung $\alpha = 1$, so wird

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

$$= 2,7182818 \ldots .$$

Setzt man diesen Werth $= e$, so bleibt nun auch für jeden andern Werth von α

$$7.\ e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Setzen wir in (No. 6.) $x = 1$, so wird ebenso

$$9.\ a = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

wo dann zu einem bestimmten Werthe von a auch ein bestimmter Werth von α gehört. Weil aber in (No. 8.) α jeden Werth haben darf, so kann der in (No. 9.) passende Werth von α auch in (8.) gelten, so daß die Werthe von a und von e^{α} einander gleich werden. Demnach

$$10.\ e^{\alpha} = a;\ \log. a = \alpha . \log. e \text{ und}$$

$$11.\ \alpha = \frac{\log. a}{\log. e}$$

Da diese Gleichung für jedes Logarithmensystem ihre Richtigkeit behält, wenn nur log. a und log. e aus einerlei

Systeme genommen werden, so kann man auch ein solches System voraussetzen, für welches log. e = 1 oder e die Basis des Systems ist. Für ein solches System ist also α = log. a, und aus (No. 6.)

$$\text{LXIII. } a^x = 1 + \frac{\log. a}{1}.x + \frac{(\log. a)^2}{1.2}x^2 + \frac{(\log. a)^3}{1.2.3}.x^3 + \frac{(\log. a)^4}{1.2.3.4}.x^4 + \text{etc.}$$

Dieser Ausdruck enthält also die gesuchte Entwickelung des Exponentialausdrucks a^x, so daß es nur noch darauf ankommt, einen leichten Weg zur Bestimmung der Logarithmen für das System zu finden, dessen Basis = 2,71828 18 .... ist.

§. 101.

Setzt man $a^x = y$, so wird

$$\text{LXIV. } y = 1 + \frac{\log. y}{1} + \frac{(l.y)^2}{2} + \frac{(l.y)^3}{2.3} + \frac{(l.y)^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Ist z = log. A, so wird hiernach

$$\text{LXV. } 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \text{etc.} = A$$

Dreizehentes Kapitel.

Entwickelung der Logarithmen in Reihen.

§. 102.

Logarithmen aus einem Systeme, dessen Basis die Zahl e (§. 100. No. 7.) ist, werden natürliche oder hyperbolische Logarithmen genennt; den letzteren Namen führen sie von einer besonderen krummen Linie, welche in der höheren Geometrie die Hyperbel genennt wird. Die französischen Schriftsteller nennen sie auch Nepersche Logarithmen, wie wohl nicht ganz richtig. Die Bezeichnung dieser Logarithmen geschieht mit lognat, logn. auch schlechtweg mit ln. *)

§. 103.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(1+b)^x = 1 + \frac{x}{1}.b + \frac{x.(x-1)}{1.2}.b^2 + \frac{x(x-1).(x-2)}{1.2.3}b^2 + \text{etc.}$$

*) Was sind nun natürliche Logarithmen? Wir kommen in der Differentialrechnung auf diesen Gegenstand zurück, und der Leser wird dort vollkommene Befriedigung finden.

$$= 1 + \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots\right) . x \; (\mathfrak{Y}$$

$$+ \left(\frac{b^2}{1} - \frac{3b^3}{2.3} + \frac{11.b^4}{2.3.4} \ldots\right) . x^2$$

$$+ \text{ etc.}$$

Setzt man (§. 100. No. 6.) $1 + b$ statt a, so erhält man

$$(1 + b)^x = 1 + \frac{\alpha}{1} . x + \frac{\alpha^2}{1.2} . x^2 + \text{ etc.}$$

also, den Koëfficient von x mit dem in ($\mathfrak{Y}$) verglichen,

$$\alpha = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots .$$

oder, wenn man α aus §. 100. No. 10. nimmt,

$$\frac{\log. a}{\log. e} = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots .$$

Daher, weil $b = a - 1$ ist,

$$1.\log. a = \left((a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4}\right).\log. e$$

welches für jedes Logarithmensystem gilt. Für das natürliche hat man, weil $\log_n. e = 1$ ist,

$$2.\log_n. a = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}$$

Also auch (No. 1.) für jedes System

$$\log. a = \log_n. a . \log. e$$

oder 3. $$\log. x = \log. e . \log_n. x$$

Wird also der log. e für irgend ein System mit M bezeichnet, so hat man für das System, worauf sich log. x bezieht,

$$4. \quad \log. x = M . \log_n. x$$

§. 104.

Der Koëfficient M (ver. §. No. 4.) wird der Model des Systems genannt, zu welchem log. x gehört. Er läßt

sich, das natürliche System schon vorausgesetzt, leicht für jedes System bestimmen, dessen Basis festgesetzt ist. Bezeichnet man nämlich diese Basis mit B, so ist log. B = 1, also vor. §. No. 4.

$$1 = M \cdot \log n.\ B$$

und

$$5.\quad M = \frac{1}{\log n.\ B}$$

Z. B. Für das Briggische System ist bekanntlich B = 10, also

$$M = \frac{1}{\ln.\ 10} = \frac{1}{2,30258509\ldots} = 0,43429448\ldots$$

Demnach

$$6.\quad \log br.\ x = 0,43429\ldots \ln.\ x$$

und

$$7.\quad \log n.\ x = 2,30258\ldots \log br.\ x$$

§. 105.

Aus (§. 100. LXIII.), wo sich die Logarithmen auf die natürlichen beziehen, hat man ($x = 1$ und $a = e$. gesetzt)

$$e^r = 1 + \frac{\ln.\ e^r}{1} + \frac{(\ln.\ e^r)^2}{1.2} + \frac{(\ln.\ e^r)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1.2} + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

also

$$\frac{e^r - 1}{r} = 1 + \frac{r}{1.2} + \frac{r^2}{1.2.3} + \frac{r^3}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

und daher, $r = 0$ gesetzt,

$$\frac{e^0 - 1}{0} = 1 + 0 + 0 + 0 \ldots = 1$$

Dieser Quotient kommt zuweilen vor.

§. 106.

Wenn die natürlichen Logarithmen in n Decimalstellen ausgedruckt werden, so hat man für die Neperschen

$$8.\ \log.\ \text{Nep.}\ x = -10^n.\ \ln.\ x$$

also M oder der Model des Neperschen Logarithmensystems $= -10^n$. Z. B.

$$\log\text{nep.}\ x = -10000000.\ \ln.\ x$$ *)

wenn die natürlichen Logarithmen in 7 Decimalstellen ausgedruckt werden. Die zugehörige Basis giebt sich aus (§. 104. No. 5.), nämlich

$$\log\text{nat.}\ B = \frac{1}{M} = \frac{1}{10^n}$$

Es ist aber (§. 100. No. 7.)

$$e^{\ln. B} = 1 + \frac{\ln. B}{1} + \frac{(\ln. B)^2}{1.2} + \frac{(\ln. B)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{2.100^n} - \frac{1}{2.3.1000^n} + \text{etc.}$$

Demnach

$$\ln\text{at.}\ e^{\ln. B}\ \text{oder}\ \ln. B = \log n.\left(1 - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{2.100^n} - \frac{1}{2.3.1000^n} + \text{etc.}\right)$$

und daher

$$B = 1 - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{2.100^n} - \frac{1}{2.3.1000^n} + \text{etc.}$$

$$= \frac{2.100^n - 2.10^n + 1}{2.100^n} - \text{etc.}$$

---

*) Oder auch

$$\log\text{nep.}\ x = \ln.\ \sqrt[10000000]{x}$$

Für $n = 7$ giebt sich

$$B = \frac{2000000000000 - 2000000 + 1}{2000000000000}$$

$$= \frac{1,9999998000001}{2}$$

$$= 0,9999999000005$$

wovon der Nepersche Logarithme $= 1$ ist.

Aus (No. 8.) ersieht man, daß die zu einerlei Zahl gehörigen Logarithmen aus dem Neperschen Systeme und aus dem natürlichen nur durch das verneinte Zeichen und das Decimalzeichen von einander verschieden sind, also übrigens ganz einerlei Ziffern enthalten.

§. 107.

1. Aus (§. 103. No. 2.) hat man

$$\text{logn. } x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \text{etc.}$$

Diese Reihe kann aber zur Berechnung der natürlichen Logarithmen nicht geradezu gebraucht werden, und wir müssen daher ihre Form so umändern, daß sie konvergirend wird.

2. Setzen wir zuerst $x + 1$ statt x, so verwandelt sich die Gleichung in folgende

$$\text{ln. } (x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.} \text{ *)}$$

---

*) Diese Gleichung würde uns schon zur Berechnung der natürlichen Logarithmen gute Dienste leisten.

Setzen wir $x = -\frac{1}{2}$, so giebt sie uns

$$\text{ln. } \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \text{\&c.}$$

Aber $\text{ln. } \frac{1}{2} = -\text{ ln. } 2$, also

3. Also $\ln. \left(\frac{w}{\alpha} + 1\right) = \ln. \left(\frac{w + \alpha}{\alpha}\right)$

$$= \frac{w}{\alpha} - \frac{w^2}{2\alpha^2} + \frac{w^3}{3\alpha^3} - \frac{w^3}{4 \cdot \alpha^4} \mp \text{etc.}$$

Daher $\log n. (w + \alpha) =$

$$\ln. \alpha + \frac{w}{\alpha} - \frac{w^2}{2\alpha^2} + \frac{w^3}{3\alpha^3} - \frac{w^4}{4 \cdot \alpha^4} + \text{etc.}$$

Ebenso, — w statt + w geschrieben

$\log n. (\alpha - w) =$

$$\ln. \alpha - \frac{w}{\alpha} - \frac{w^2}{2\alpha^2} - \frac{w^3}{3\alpha^3} - \frac{w^4}{4 \cdot \alpha^4} - \text{etc.}$$

4. Aus (No. 3.) folgt

$\log n. \frac{\alpha + w}{\alpha - w}$ oder $\ln. (\alpha + w) - \ln. (\alpha - w)$

$$= \frac{2w}{\alpha} + \frac{2w^3}{3\alpha^3} + \frac{2w^5}{5\alpha^5} + \frac{2w^7}{7\alpha^7} + \text{etc.}$$

5. Setzt man $w = 1$, so wird

$$\ln. (\alpha + 1) = \ln. (\alpha - 1) + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{3\alpha^3} + \frac{2}{5\alpha^5} + \text{etc.}$$

6. Setzt man (No. 4.) $\alpha = 1$, so wird

$$\ln. 2 = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \&c.$$

Setzt man nun $x = -\frac{1}{3}$, so wird

$$\ln. \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^3} - \&c.$$

Aber $\ln. \frac{2}{3} = \ln. 2 - \ln. 3$; also

$$\ln. 3 = \ln. 2 + \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \&c.$$

Setzt man so nach der Reihe $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{6}$ &c. statt x, so findet man die natürlichen Logarithmen von 4; 5; 6 &c.

$$\text{logn.}\ \frac{1+w}{1-w} = 2w + \frac{2w^3}{3} + \frac{2w^5}{5} + \frac{2w^7}{7} + \text{etc.}$$

7. Man kann aber (No. 6.) durch den Bruch $\frac{1+w}{1-w}$ jede mögliche x ausdrucken; soll er nämlich die Zahl x geben, so muß $1 + w = x - xw$ werden, also $w = \frac{x-1}{x+1}$ seyn. Soll z. B. $\frac{1+w}{1-w} = 2$ seyn, so wird $w = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$; also (No. 6.)

$$\text{logn.}\ 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.}$$

welches schon eine sehr stark konvergirende Reihe ist. Für $x = 3$ wird $w = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$ u. s. f.

Setzen wir in (6.) x statt $\frac{1+w}{1-w}$, also zur Rechten zugleich $\frac{x-1}{x+1}$ statt w, so wird

$$\text{logn.}\ x = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \text{etc.} \right)$$

Auch aus (No. 5.), x statt $\alpha + 1$ gesetzt,

$$\text{logn.}\ x = \text{logn.}\ (x-2) + 2 \cdot \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3(x-1)^3} + \frac{1}{5(x-1)^5} + \text{etc.} \right)$$

z. B.

$$\text{ln.}\ 3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} \ldots \right)$$

8. Hat man einmal logn. 2 und ln. 3 berechnet, so geben sich die folgenden Logarithmen immer schneller. Ist

es um sehr viele Decimalstellen bei jenen beiden ersten Logarithmen zu thun, so kann sich noch stärker konvergirender Reihen bedienen. Setzt man nämlich (No. 6.) $\frac{x^2}{x^2-1}$ statt $\frac{1+w}{1-w}$

so wird $w = \frac{1}{2x^2-1}$, also

$$l.\ \frac{x^2}{x^2-1} = 2.\left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3.(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5.(2x^2-1)^5} + \text{etc.}\right)$$

Es ist aber auch

$$l.\ \frac{x^2}{x^2-1} = l.\ \frac{x^2}{(x+1).(x-1)}$$
$$= 2.\ l.\ x - l.\ (x+1) - l.\ (x-1)$$

also $\log n.\ x =$

$$\frac{\ln.\ (x+1) + \ln.\ (x-1)}{2}$$
$$+ \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3.(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5.(2x^2-1)^5} + \text{etc.}$$

Setzt man nun $x = 2$, so wird

$$\ln.\ 2 = \frac{\ln.\ 3}{2} + \frac{1}{8-1} + \frac{1}{3.(8-1)^3} + \frac{1}{5.(8-1)^5} + \frac{1}{7.(8-1)^7} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = 3$, und $\ln.(3+1) = 2.\ln.2$, so wird

$$\ln.3 = \frac{2.\ln.2 + \ln.2}{2} + \frac{1}{18-1} + \frac{1}{3.(18-1)^3} + \frac{1}{5.(18-1)^5} + \text{etc.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$\text{logn.}\,2 = 2.\left\{\begin{array}{l} 2.\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \frac{1}{7.7^7} + \frac{1}{9.7^9} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \frac{1}{7.17^7} + \frac{1}{9.17^9} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$\text{logn.}\,3 = 2\left\{\begin{array}{l} 3.\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \frac{1}{7.7^7} + \frac{1}{9.7^9} + \text{etc.}\right) \\ + 2.\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \frac{1}{7.17^7} + \frac{1}{9.17^9} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

9. Auch erhält man aus (No. 8.)

$$\text{logn.}\,(x+1) = 2.\,\text{logn.}\,x - \text{logn.}\,(x-1) - 2\left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3.(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5.(2x^2-1)^5} + \text{etc.}\right)$$

Z. B. logn. $(4+1)$ oder logn. $5 =$

$$2.\ln.4 - \ln.3 - 2.\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{5.31^5} + \frac{1}{7.31^7} + \frac{1}{9.31^9} + \text{etc.}\right)$$

Auf diese Weise können die Logarithmen aller folgenden Zahlen mit immer zunehmender Schnelligkeit leicht berechnet werden.

Anm. Jetzt hat man berechnete Tafeln natürlicher Logarithmen im 1ten Bande der Schulzischen Tafeln (Berlin 1778), auch im 2ten Bande der Vegaischen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (Leipz. 1797), und mit 48 Decimalstellen in dem Vegaischen Thesauro logarithmorum completo (Lips. 1794). In der höheren Mathematik ist ihr Gebrauch unentbehrlich.

Vierzehentes Kapitel.

Von Mitteln zu Gleichungen zwischen veränderlichen Grössen zu gelangen.

§. 108.

X und y seyen Funktionen von einander d. h. veränderliche Größen, die in Bezug auf ein bestimmtes Objekt so von einander abhängen, daß sich keine ohne die andere ändern kann *). Ist nun das eigentliche Gesetz, nach

*) Beispiele solcher Größen giebt es unzählige, z. B. in Bezug auf einen bestimmten Kreis Sehne und zugehöriger Bogen, auch zugehöriges Segment. In Bezug auf einen bestimmten Kanal Geschwindigkeit des Wassers und Menge des in 1 Sekunde abfliessenden Wassers. In Bezug auf einen frei herabfallenden Körper Zeit der Bewegung und erlangte Geschwindigkeit. Auch können in Bezug auf ein bestimmtes Objekt Großen unveränderlich oder beständige Größen und doch Funktionen von einander seyn, z. B. der Durchmesser und der Umfang eines bestimmten Kreises. Legt man aber bei der Voraussetzung eines Kreises nur den allgemeinen Begriff vom Kreise zum Grunde, so daß überhaupt von Figuren die Rede ist, welche dem Begriffe vom Kreise untergeordnet sind, so muß der Durchmesser selbst als veränderliche Größe betrachtet werden, da dann jedem anderen Durchmesser auch ein anderer Umfang zugehört, also Durchmesser und Umfang gleichfalls Funktionen von einander sind.

welchem x und y von einander abhängen, unbekannt, daß man also auch keine Gleichung hat, die uns in den Stand setzte, für jeden gegebenen Werth der einen x auch den zugehörigen der anderen y zu bestimmen, und kennt man doch die Abhängigkeit der einen von der andern nur für einzelne bestimmte Fälle; weiß man z. B. etwa aus Beobachtungen oder anderswoher, daß gegebenen Werthen m, n, p, q, r etc. von x gegebene Werthe α, β, γ, δ, ε etc. von y zugehören, so können Fälle vorkommen, wo man wissen muß, was für Werthe von y zu solchen Werthen von x gehören, welche zwischen jenen m, n, p, q, r etc. liegen. Jedes Verfahren, aus gegebenen zusammengehörigen Werthen von x und y zusammengehörige Zwischenwerthe abzuleiten, heißt das Interpoliren oder das Einschalten. Eine aus den gegebenen zusammengehörigen Werthen von x und y hergeleitete Näherungsformel für zusammengehörige Zwischenwerthe heißt eine Interpolirungs- oder Interpolationsformel. Solche Formeln sind für den Physiker von großer Wichtigkeit.

§. 109.

Wir haben im X und XIten Kapitel eine so große Mannichfaltigkeit von Reihen kennen gelernt, daß uns zuweilen die bloße Vergleichung einer Reihe gegebener Zahlen mit jenen Reihen auf das Gesetz führt, welches sie in ihrer Folge beobachten, wenigstens genügend für die Anwendungen, welche wir davon zu machen haben. Ein Beispiel giebt uns das in der Anmerkung zu §. 88. angegebene Gesetz, welches mir dort zum erstenmal bemerkbar wurde.

Hätte man folgende zusammengehörige Werthe

von x . . .	6	8	9	12
— y . . .	27	35	39	51

so könnte man zweierlei Vergleichungen zwischen x und y anstellen:

1. In Bezug auf geometrisches Verhältniß.

Das erste Glied giebt $y = \frac{27}{6} \cdot x = 4{,}5 \cdot x$

— letzte — — $y = \frac{51}{12} \cdot x = 4{,}25 \cdot x$

Die Mittelzahl wäre $y = 4\frac{3}{8} \cdot x$

Hiernach gehört zu $x = 8$, $4\frac{3}{8} \cdot 8 = 35$

zu $x = 9$, $4\frac{3}{8} \cdot 9 = 39\frac{3}{8}$

zu $x = 6$, $4\frac{3}{8} \cdot 6 = 26\frac{1}{4}$

zu $x = 18$, $4\frac{3}{8} \cdot 12 = 52\frac{1}{2}$

Für sehr viele Fälle der Ausübung kommen Abweichungen zu $\frac{1}{20}$ des Ganzen nicht in Betrachtung.

Man könnte also in solchen Fällen die Interpolirungsformel

$$y = 4\frac{3}{8} \cdot x$$

annehmen

2. In Bezug auf arithmetisches Verhältniß. Wir schreiben zu dem Ende die beiden Reihen so unter einander

x . . .	6	6 + 2	6 + 3	6 + 6
y — x . . .	21	21 + 6	21 + 9	21 + 18

Setzen wir nun $x = 6 + d$, so wird

für das 1te Glied $y - x = 21 + 0$

2te — $= 21 + 3 \cdot d$

3te — $= 21 + 3 \cdot d$

4te — $= 21 + 3d$

wo nun auch für das 1te Glied $y - x = 21 + 3d$ gesetzt werden kann, weil für solches $d = 0$ ist.

Man erhält also aus dieser Vergleichung die genaue Formel $y - x = 21 + 3d$,
oder

$$y = x + 21 + 3d$$

Aber $x - 6 = d$ also $y = x + 21 + 3x - 18$,
oder

$$y = 4x + 3$$

Setzt man das 1te Glied in der Reihe der $x = a$, so wird in ganzen Zahlen

$$y = 4a + 3$$

das 2te

$$y = 4 \cdot (a + 1) + 3 = 4a + 7$$

das 3te $y = 4 \cdot (a + 2) + 3 = 4a + 11$
und die Glieder der Reihe schreiten in einer arithmetischen Reihe fort.

So können auch zuweilen figurirte Zahlen in gegebenen zusammengehörigen Reihen verstreckt liegen. Hätte man z. B. nachstehende zusammengehörige Werthe

von x . . .	3	5	8	10
— y . . .	10	35	120	220

so giebt die Vergleichung mit der Tafel (§. 90.), daß die Werthe von y Trigonalzahlen der 2ten Ordnung sind. Die Formel LX. (§. 93.) giebt nun für jedes x das zugehörige y, indem man $K = 1$ und $n = x$ setzt.

Um z. B. für $x = 10$ das zugehörige y zu finden hat man

1				
4	$3 = d'$			
10	6	$3 = d''$		
20	10	4	$1 = d'''$	
35	15	5	1	$0 = d^{iv}$

also

$$y = 1 + 9 \cdot 3 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 3 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} \cdot 1$$

$$= 1 + 27 + 108 + 84 = 220$$

Für $x = 9$ ergiebt sich das eingeschaltete Glied

$$y = 1 + 8 \cdot 3 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 3 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot 1$$

$$= 1 + 24 + 84 + 56 = 165$$

Für $x = 8{,}3$

$$y = 1 + 7{,}3 \cdot 3 + \frac{7{,}3 \cdot 6{,}3}{2} \cdot 3 + \frac{7{,}3 \cdot 6{,}3 \cdot 5{,}3}{2 \cdot 3} \cdot 1$$

$$= 1 + 21{,}9 + 68{,}985 + 40{,}6245$$

$$= 132{,}5095$$

Die Gestalt der Reihe von y oder die Ordnung, in welcher die Glieder fortschreiten, könnte noch versteckter liegen. Die gegebenen Reihen könnten z. B. folgende seyn:

Werthe

von x . . .	16	18	21	23
— y	7	32	117	217

Setzt man hier $x - 13$ statt x, und $y + 3$ statt y, so erhält man die vorigen Reihen. Setzt man also $K = 1$ und $x - 13$ in LX statt n, so giebt die dortige Gleichung den Werth von $y + 3$, also

$$y = (x - 14) \cdot d' + \frac{(x - 14) \cdot (x - 15)}{2} \cdot d''$$

$$+ \frac{(x - 14) \cdot (x - 15) \cdot (x - 16)}{2 \cdot 3} - 2$$

Z. B. Für $x = 19{,}5$ wird

$$y = 5{,}5 \cdot 3 + \frac{5{,}5 \cdot 5{,}4}{2} \cdot 3 + \frac{5{,}5 \cdot 5{,}4 \cdot 5{,}3}{2 \cdot 3} - 2$$

$$= 16{,}5 + 44{,}55 + 26{,}235 - 2 = 85{,}285$$

Um nun eine Näherungsformel zwischen x und y zu finden, ist es nicht nöthig, daß die gegebenen Reihen ge-

rade figurirte Zahlen einer gewissen Ordnung bilden, oder daß sich solche in dergleichen (etwa dadurch, daß man die Glieder der Reihe von x oder die der Reihe von y, oder wie im vorstehenden Falle beiderlei Glieder durchaus um einerlei Zahl größer oder kleiner nimmt) verwandlen lassen. Für die Ausübung genügt sehr oft nur beiläufige Uebereinstimmung mit Reihen, die nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden. Die Aufsuchung solcher Reihen setzt in den meisten Fällen einen schon geübten Rechner voraus, und in sehr vielen Fällen ist jede Bemühung, auf diesem Wege zu einer allgemeinen Bestimmung zu gelangen, fruchtlos.

§. 110.

In vielen Fällen, wo das vorstehende Verfahren nicht zum Ziele führt, kann man durch eine hypothetisch angenommene Gleichung des 2ten Grades zum Zwecke kommen, indem man

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

setzt, und aus den gegebenen zusammengehörigen Werthen von x und y die Werthe von α, β, γ ableitet.

Wir wollen y', y'', $y'' \ldots y^{(n)}$ und x', x'', $x'' \ldots x^{(n)}$ als zusammengehörige bekannte Werthe von y und von x annehmen, so daß (n) nur eine Anzahl von Strichen bezeichnet; weil nun jedesmal $y^{(n)} - \beta x^{(n)} - \gamma x^{(n)} = \alpha$ seyn soll, was auch n für eine Anzahl von Strichen bezeichnet, so hat man

1) $y' - \beta x' - \gamma (x')^2 = y'' - \beta x'' - \gamma (x'')^2$
2) $y'' - \beta x'' - \gamma (x'')^2 = y''' - \beta x''' - \gamma (x''')^2$
3) $y''' - \beta x''' - \gamma (x''')^2 = y^{iv} - \beta x^{iv} - \gamma (x^{iv})^2$
4) $y^{iv} - \beta x^{iv} - \gamma (x^{iv})^2 = y^{v} - \beta x^{v} - \gamma (x^{v})^2$

Aus 1 und 2 giebt sich β und γ
2 und 3 erhält man neue Werthe für β und γ
3 und 4 wieder neue Werthe.
u. s. f.

Die so herauskommenden verschiedenen Werthen von β und γ dürfen nun, wenn diese Methode eine brauchbare Gleichung geben soll, nicht viel von einander verschieden seyn. Um wieviel? das hängt von den besonderen Anwendungen ab, die man von der Gleichung in der Ausübung machen will. So kann man z. B. in vielen Fällen zufrieden seyn, wenn man die grösten Werthe von β und γ nicht über $\frac{1}{5}$ größer findet als die kleinsten.

Geschieht dieser Bedingung der Anwendbarkeit Genüge, so nehme man aus allen gefundenen Werthen von β, und so auch aus allen von γ das arithmetische Mittel, und setze nun, indem man für β und γ ihre gefundenen arithmetische Mittelwerthe gebraucht,

$$\begin{aligned} y &- \beta x' &- \gamma (x')^2 &= \alpha \\ y'' &- \beta x'' &- \gamma (x'')^2 &= \alpha \\ y''' &- \beta x''' &- \gamma (x''')^2 &= \alpha \\ y^{IV} &- \beta x^{IV} &- \gamma (x^{IV})^2 &= \alpha \\ y^{V} &- \beta x^{V} &- \gamma (x^{V})^2 &= \alpha \end{aligned}$$

u. s. f.

Hat man N solche Werthe von α, und ist die Summe dieser N Werthe $= S$, so hat man als Mittelwerth von α

$$\alpha = \frac{S}{N}$$

und man hat nun mehr die gesuchte Gleichung

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

indem α, β und γ die gefundenen Mittelwerthe bezeichnen.

Ich habe mich dieses Verfahrens mehrmals bedient.

§. III.

Es giebt Fälle, wo wir für eine gewisse Reihe von x d. h. innerhalb bestimmten Gränzen der Werthe von x zu einem gewissen allgemeinen Ausdruck für die zugehörigen y gelangen können, dann aber über diese Gränze hinaus bis zu einer zweiten Gränze wieder einen neuen Ausdruck für die y gebrauchen müssen, dann wieder einen neuen u. s. f.

Für solche Fälle dient uns vorzugsweise die allgemeine Interpolirungsformel

$$y = w + Ax + Bx.(x-m) + Cx.(x-m).(x-n) + Dx.(x-m).(x-n).(x-p) + \text{etc.}$$

Dabei wird vorausgesetzt, man wisse schon, daß

$y = w$ werde, wenn $x = o$ (Null) ist
$= \alpha$ — — $x = m$
$= \beta$ — — $x = n$
$= \gamma$ — — $x = p$
$= \delta$ — — $x = q$
u. s. f.

wo $m < n$, $n < p$ u. s. f.

Diese allgemeine Gleichung giebt uns soviele speciellere, als Werthe m, n, p, q etc. von x mit ihren zugehörigen Werthen α, β, γ, δ etc. von y gegeben sind.

Für alle Fälle von $x = o$ bis zu $x = m$ hat man

$$y = w + Ax + Bx.(x-m)$$

Diese Gleichung bricht, für $x = m$, mit dem 2ten Gliede ab, so daß dann nur $y = w + Ax$ bleibt. Sie kann für $x > m$ nicht gebraucht werden.

Für alle Fälle von $x > m$ bis zu $x = n$ wird

$$y = w + Ax + Bx.(x-m) + Cx.(x-m).(x-n)$$

Diese bricht, für $x = n$, mit dem 3ten Gliede ab, so daß dann $y = w + Ax + Bx.(x-m)$ wird. Für $x > n$ findet sie nicht statt.

Für alle Fälle von $x > n$ bis zu $x = p$ wird

$$y = w + Ax + Bx.(x-m) + Cx.(x-m).(x-n) + Dx.(x-m).(x-n).(x-p)$$

Diese bricht, für $x = p$, mit dem 4ten Gliede ab, und es bleibt $y = w + Ax + Bx\,(x-m) + Cx.(x-m).(x-n)$. Für $x > p$ ist sie unanwendbar.

u. s. f.

Nun soll aber die Gleichung so beschaffen seyn, daß sie $y = \alpha$ giebt, wenn $x = m$ wird, also

$$\alpha = w + Ax = w + Am$$

$$\text{und } A = \frac{\alpha - w}{m}$$

Geht x über m hinaus bis zu $x = n$, so soll sie $y = \beta$ geben, also

$$\beta = w + \frac{\alpha - w}{m}.n + B.n.(n-m)$$

Daher

$$B = \frac{\beta - w - An}{n.(n-m)}$$

Auf gleiche Weise ergeben sich die Werthe von C, D etc.

Die Anzahl der Glieder unserer obigen Interpolirungsformel ist also im Allgemeinen unbestimmt, indem diese Anzahl dadurch von x abhängig gemacht wird, daß man nach und nach die Faktoren $(x-m)$, $x-m).(x-n)$, $(x-m).(x-n).(x-p)$ etc. in die nach einander folgenden Glieder bringt.

Soll nun für irgend einen Werth von x z. B. für $x = \mathfrak{A}$ der Werth von y gesucht werden, und liegt z. B. $\mathfrak{A}$ zwischen n und p, so hat man

$$y = w + A\mathfrak{A} + B.\mathfrak{A}.(\mathfrak{A}-m) + C.\mathfrak{A}.(\mathfrak{A}-m).(\mathfrak{A}-n)$$

Das nächstfolgende Glied wäre nämlich $D.x\,(x-m).(x-n).(x-\mathfrak{A})$ also $= o$, weil $x = \mathfrak{A}$ seyn soll.

Die zu $y = \alpha$, $= \beta$, $= \gamma$ etc. gehörigen Werthe von x, wie m, n, p etc. wollen wir Grundwerthe nennen.

§. 112.

Einige Anwendungen.

Nach Richter (Ueber die neuern Gegenstände der Chemie 10tes St. S. 130.) kann man die specif. Schwere einer wäßrichten Auflösung der Arsenikſäure als Grundwerthe von x mit m, n, p, q etc. bezeichnen, da dann α, β, γ, δ etc. als Werthe von y den Gehalt der Arsenikſäure ausdrucken. Man hat also nach seinen Angaben

Grundwerthe von x	Zugehörige Werthe von y
$m = 1{,}0000$	$\alpha = 0$
$n = 1{,}1434$	$\beta = 161{,}7$
$p = 1{,}2003$	$\gamma = 217{,}1$
$q = 1{,}2713$	$\delta = 273{,}2$
$r = 1{,}3992$	$\varepsilon = 372{,}2$

Zur Anwendung der Formel brauchen wir die Werthe von A, B, C, D . . . . . Es ist aber

$$A = \frac{\alpha - w}{m}$$

$$B = \frac{\beta - w - An}{n \cdot (n - m)}$$

Für $x = p$ und $y = \gamma$ wird

$$\gamma = w + Ap + Bp \cdot (p - m) + C \cdot p \cdot (p - m) \cdot (p - n)$$

also

$$C = \frac{\gamma - w - Ap - Bp \cdot (p - m)}{p \cdot (p - m) \cdot (p - n)}$$

Für $x = q$ und $y = \delta$ wird

$$\delta = w + Aq + Bq.(q-m) + Cq.(q-m).(q-n) + Dq.(q-m).(q-n).(q-p)$$

also

$$D = \frac{\delta - w - Aq - Bq.(q-m) - Cq.(q-m).(q-n)}{q.(q-m).(q-n).(q-p)}$$

Ebenso für $x = r$ und $y = \epsilon$

$$E = \frac{\left(\epsilon - Aw - Ar - Br.(r-m) - Cr(r-m).(r-n) - Dr.(r-m).(r-n).(r-p)\right)}{r.(r-m).(r-n).r-p).(r-q)}$$

Man hat also hier, wo $w = o$ ist,

$$A = \frac{\alpha}{m} = o$$

$$B = \frac{161,7}{1,1434 \cdot 0,1434} = 986$$

$$C = \frac{217,1 - 986 \cdot 1,2003 \cdot 0,2003}{1,2003 \cdot 0,2003 \cdot 0,0569} = -1459$$

$$D = \frac{\left(273,2 - 986 \cdot 1,2713 \cdot 0,2713 + 1459 \cdot 0,2713 \cdot 0,1279\right)}{1,2713 \cdot 0,2713 \cdot 0,1279 \cdot 0,0710}$$

$$= -3206$$

$$E = \frac{\left(372,2 - 986 \cdot 0,55856 + 1459 \cdot 0,14288 + 3206 \cdot 0,028419\right)}{0,003634}$$

$$= 33319$$

Bezeichnet also $\mathfrak{A}$ Werthe von x, welche > 1 sind, so hat man

$$y = 986.\mathfrak{A}.(\mathfrak{A}-m) - 1459.\mathfrak{A}.(\mathfrak{A}-m).(\mathfrak{A}-n) - 3206.\mathfrak{A}.(\mathfrak{A}-m).(\mathfrak{A}-n).(\mathfrak{A}-p) + \text{etc.}$$

No. 1. Das 1te Glied gilt von $\mathfrak{A} = 1$ bis $\mathfrak{A} = 1,1434$

No. 2. Die 2 ersten Gl. gelten v. $\mathfrak{A} = 1,1434$ bis $\mathfrak{A} = 1,2003$

No. 3. Die 3 ersten Gl. gelten v. $\mathfrak{A} = 1{,}2003$ bis $\mathfrak{A} = 1{,}2713$
No. 4. Die 4 — — — — $\mathfrak{A} = 1{,}2713$ — $\mathfrak{A} = 1{,}3992$

Z. B.

Zu No. 1.
Für $\mathfrak{A} = 1{,}03$ wird
$y = 986 . 1{,}03 . 0{,}03 = 30$
Für $\mathfrak{A} = 1{,}12$ wird
$y = 986 . 1{,}12 . 0{,}12 = 132{,}5$

Zu No. 2 u. 3.
Für $\mathfrak{A} = 1{,}18$ wird No. 2.
$y = 986 . 1{,}18 . 0{,}18 - 1459 . 1{,}18 . 0{,}18 . 0{,}0366$
$= 198{,}184$
Für $\mathfrak{A} = 1{,}24$ wird No. 3.
$y = 986 . 1{,}24 . 0{,}24 - 1459 . 1{,}24 . 0{,}24 . 0{,}0966$
$- 3206 . 1{,}24 . 0{,}24 . 0{,}0966 . 0{,}0397$
$= 247{,}829$

Zu No. 4.
Für $\mathfrak{A} = 1{,}36$ wird No. 4.
$y = 986 . 0{,}4896 - 1459 . 0{,}106047$
$- 3206 . 0{,}0169357 + 33319 . 0{,}0015017$
$= 323{,}762$

§. 113.

Man könnte diese Berechnungen auch so führen:

Grundwerthe von x	Zugehörige Werthe von y
$m = 161{,}7$	$\alpha = 1{,}1434$
$n = 217{,}1$	$\beta = 1{,}2003$
$p = 273{,}2$	$\gamma = 1{,}2713$
$q = 372{,}2$	$\delta = 1{,}3998$

da dann jetzt x die Gehalte und y die specifischen Gewichte bezeichnet.

Die allgemeine Formel

$$y = w + Ax + Bx . (x - m) + Cx (x - m) . (x - n) + Dx (x - m) . (x - n) . (x - p) + \text{etc.}$$

giebt also jetzt für jeden Gehalt das zugehörige specifische Gewicht an.

Ist der Gehalt $x = 0$, so wird

das specifische Gewicht $y = w + 0 + 0 \ldots = w$

Aber für $x = 0$ ist $y = 1$, also $w = 1$.

Demnach

$$y = 1 + Ax + Bx.(x - m) + Cx.(x - m).(x - n) + Dx.(x - m).(x - n).(x - p) + \text{etc.}$$

Für jeden Werth von x, den wir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen, hat man also

$$y = 1 + A\mathfrak{A} + B\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m) + C.\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m).(\mathfrak{A} - n) + D\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m).(\mathfrak{A} - n).(\mathfrak{A} - p) + \text{etc.}$$

Für $\mathfrak{A} < 161{,}7$ hat man

$$1)\quad y = 1 + A\mathfrak{A}$$

Für $\mathfrak{A} > 161{,}7$ aber $< 217{,}1$

$$2)\quad y = 1 + A\mathfrak{A} + B\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m)$$

Für $\mathfrak{A} > 217{,}1$ aber $< 273{,}3$

$$3)\quad y = 1 + A\mathfrak{A} + B\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m) + C\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m).(\mathfrak{A} - n)$$

Für $\mathfrak{A} > 273{,}3$ aber $< 372{,}2$

$$4)\quad y = 1 + A\mathfrak{A} + B\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m) + C\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m).(\mathfrak{A} - n) + D\mathfrak{A}.(\mathfrak{A} - m).(\mathfrak{A} - n).(\mathfrak{A} - p)$$

Dabei ist

$$A = \frac{\alpha - w}{m} = \frac{0{,}1434}{161{,}7} = 0{,}0008868$$

Für $\mathfrak{A} = 37{,}5$ wird

$$y = 1 + 0{,}000887 \cdot 37{,}5 = 1{,}033$$

Ferner

$$B = \frac{\beta - w - An}{n.(n - m)} = \frac{0{,}00774}{12027} = 0{,}00000064$$

Demnach, für $\mathfrak{A} = 198$,

$$y = 1 + 0{,}1755 + 0{,}0046 = 1{,}1801$$

§. 114.

Die Berechnung liesse sich auch abkürzen. Nehmen wir jetzt wieder x für das specifische Gewicht und y für den Gehalt, so können wir folgende Werthe zum Grunde legen.

I.	$m = 1{,}0000$	$\alpha = 0$
	$n = 1{,}1434$	$\beta = 161{,}7$
II.	$m = 1{,}1434$	$\alpha = 161{,}7$
	$n = 1{,}2003$	$\beta = 217{,}1$
III.	$m = 1{,}2003$	$\alpha = 217{,}1$
	$n = 1{,}2713$	$\beta = 263{,}2$
IV.	$m = 1{,}2713$	$\alpha = 273{,}2$
	$n = 1{,}3992$	$\beta = 372{,}2$

Für diese verschiedenen Ansätze dient uns die abgekürzte Gleichung

$$y = A \cdot \mathfrak{A} + B \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} - m)$$

wo dann

$$A = \frac{\alpha}{m}; \quad B = \frac{\beta - An}{n \cdot (n - m)}$$

Für Werthe von $\mathfrak{A}$ zwischen m und n No. I.

ist $A = 0; \quad B = 986$

Für $\mathfrak{A}$ zwischen m und n No. II. ist

$$A = \frac{161{,}7}{1{,}1434} = 141{,}33$$

$$B = \frac{217{,}1 - 141{,}33 \cdot 1{,}2003}{1{,}2003 \cdot (1{,}2003 - 1{,}1434)} = 694{,}9$$

Für $\mathfrak{A}$ zwischen m und n No. III. ist

$$A = \frac{217{,}1}{1{,}2003} = 180{,}87$$

$$B = \frac{273{,}2 - 180{,}87 \cdot 1{,}2713}{1{,}2713 \cdot (1{,}2713 - 1{,}2003)} = 479{,}7$$

Für $\mathfrak{A}$ zwischen m und n No. IV. ist

$$A = \frac{273,2}{1,2713} = 214,80$$

$$B = \frac{372,2 - 214,89 \cdot 1,3992}{1,3992 \cdot (1,3992 - 1,2713)} = 399,6$$

Ex. Zu No. II. Für $\mathfrak{A} = 1,18$ wird

$$y = 141,33 \cdot 1,18 + 694,9 \cdot 1,18 \cdot (1,18 - 1,1434)$$
$$= 196,78$$

Zu No. III. Für $\mathfrak{A} = 1,24$ wird

$$y = 180,87 \cdot 1,24 + 479,7 \cdot 1,24 \cdot (1,24 - 1,2003)$$
$$= 247,2.$$

Zu No. IV. Für $= 1,33$ wird

$$y = 214,89 \cdot 1,33 + 399,6 \cdot 1,33 \cdot (1,33 - 1,2713)$$
$$= 320,99$$

Noch ein Beispiel. Es sey

x	y
$m = 1$	$\alpha = 15$
$n = 2$	$\beta = 20$
$p = 4$	$\gamma = 30$

und $\mathfrak{A} = 3$ ein Zwischenwerth zwischen n und p für welchen man den zugehörigen Werth von y, welcher zwischen 20 und 30 fällt, finden soll. Hier wird

$$y = w + \frac{\alpha - w}{m} \cdot \mathfrak{A} + \frac{\beta - w - An}{n \cdot (n - m)} \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} - m)$$
$$+ \frac{\gamma - w - Ap - Bp \cdot (p - m)}{p \cdot (p - m) \cdot (p - n)} \cdot \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} - m) \cdot (\mathfrak{A} - n)$$

Es ist aber $A = \frac{\alpha - w}{m} = 5$

$$B = \frac{\beta - w - An}{n \cdot (n - m)} = 0$$

$$C = 0$$

Also

$$y = 10 + 5 \cdot 3 = 25$$

wie es auch ohne diese Rechnung Jedem gleich ins Auge fällt.

§. 114.

Man kann dieses Verfahren bei etwas regulär fortschreitenden Reihen auch gebrauchen, Werthe von y zu bestimmen, die über die vorgegebene Gränze hinaus liegen.

Wäre im letzten Beispiele des vorigen §., für $x = B = A$, $y = 25$ gegeben, und das zu $x = p = 4$ gehörige γ gesucht, so hätte man

$$25 = 10 + 5 \cdot 3 + \frac{\gamma - 10 - 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 2$$

$$= 25 + \frac{\gamma - 30}{4}; \text{ also } \gamma = 30.$$

Anm. Wenn x und y wie bisher Funktionen von einander sind, und überdas $\mathfrak{X}$ eine Funktion von x und Y eine Funktion von y folglich auch $\mathfrak{X}$ eine Funktion von Y ist, so hängt der Quotient $\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{X}}{Y - Y}$ von der besonderen Gestalt der Funktionen $\mathfrak{X}$ und Y ab. Läßt sich die Funktion $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}$ auf die Form K. $(x - x)$, und die Y auf die Form W. $(x - x)$ bringen, so erhält man $\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{X}}{Y - Y} = \frac{K. (x - x)}{W. (x - x)}$ $= \frac{K}{W}$. Auf dergleichen Bestimmungen beruht die Differential- und Integralrechnung, oder die Analysis des Unendlichen, welche uns die wichtigsten Hülfsmittel darbiethet, Gleichungen zwischen veränderlichen Größen zu finden, doch werden durch sie die bisherigen Lehren nicht entbehrlich gemacht.

Fünfzehentes Kapitel.

Vom Maximum und Minimum.

§. 115.

Y sey eine Funktion von x (z. B. $ax + x^2$, $bx - cx^4$, $\frac{a + bx^3}{m - cx}$ etc.), so lassen sich auf einer geraden af (Fig. 2 u. 3.) allemal Stücke abschneiden, welche Werthe von x ausdrucken, und am Ende einer jeden solchen Abscisse x läßt sich ein Perpendikel $=$ Y aufrichten. Durch die Endpunkte aller möglichen solchen Perpendikel läßt sich eine Linie, wie m c h e n gezogen denken, die eine sinnliche Darstellung für das Verhalten zwischen x und Y giebt.

§. 116.

Steigt nun die Linie m h n z. B. bis in h (Fig. 2.), und sinkt dann wieder nieder, so giebt es zur Rechten und Linken von h nothwendig irgendwo ein Paar gleich große Y z. B. b c und d e.

Es sey nun $ab = x$, $bd = z$, und $ax - x^3 = Y$, so ist

$$bc = ax - x^3$$

$$de = a(x + z) - (x + z)^3$$

$$= ax + az - x^3 - 3zx^2 - 3xz^2 - z^3$$

und nun nach der Voraussetzung

$$ax - x^2 = ax - x^3 + az - 3x^2z - 3xz^2 - z^3$$

oder

$$az - 3x^2z - 3xz^2 - z^3 = 0 \quad (\mathbb{C}$$

Daher auch noch

$$a - 3x^2 - 3xz - z^2 = 0 \quad (\odot$$

woraus sich für jedes angenommene z das zugehörige x finden läßt, so daß das größte Y zwischen x und $x + z$ liegen muß.

§. 117.

Um nun dasjenige x zu erhalten, dem das größte Y zugehört, darf man nur $z = 0$ setzen; wenn nämlich die beiden gleichen Perpendikel, zwischen welchen das größte Y liegt, in einem Punkte g zusammenfallen, so machen sie selbst das größtmögliche Y aus, und der zugehörige Werth von x ist also der, welchem der größtmögliche von Y entspricht.

In unserem Beispiele erhält man nun aus $\odot$, $z = 0$ gesetzt,

$$a - 3x^2 = 0, \text{ also } x = \sqrt{\tfrac{1}{3}a}$$

Wäre z. B. $\frac{b + x}{mx^2 - nx} = Y$, so hätte man, $x + z$ statt x gesetzt, auch

$$\frac{b + x + z}{mx^2 + 2mxz + mz^2 - nx - nz} = Y$$

$$= \frac{b + x}{mx^2 - nx}$$

Man erhält hieraus

$$mx^2 - nx = (b + x).(2mx + mz - n)$$

und nun, $z = 0$ gesetzt,

$$x = -b + \sqrt{\left(b^2 + \frac{bn}{m}\right)}$$

welches derjenige Werth von x ist, zu welchem der größtmögliche von Y gehört; oder der Quotient $\frac{b + x}{mx^2 - nx}$ wird am größten, wenn man $x = -b + \sqrt{\left(b^2 + \frac{bn}{m}\right)}$ nimmt.

§. 118.

Die Darstellung für Y (Fig. 3.) giebt zu erkennen, daß zwischen gleichen Werthen von Y (wie bc und de auch der kleinste von Y liegen kann (wie gh).

Die vorstehende Berechnung läßt es unentschieden, ob der gefundene Werth von x das Maximum oder das Minimum von Y gebe. Um dieses zu entscheiden, darf man nur x etwas kleiner oder etwas größer als das gefundene nehmen, und den zugehörigen Werth von Y berechnen; wird dieser größer als nach der vorigen Berechnung, so hat man vorhin ein Minimum; wird er kleiner, so hat man vorhin ein Maximum gefunden.

1. Anm. In der Analysis sollen nur arithmetische Untersuchungen vorkommen, nichts auf geometrische Untersuchungen gebaut werden. Man sieht aber leicht ein, daß man auch hier keiner Zeichnung bedurft hätte, und daß bei der Hinweisung auf die Zeichnung durchaus keine geometrische Kenntnisse vorausgesetzt worden sind. Sie ist nur zur Versinnlichung des Arithmetischen gebraucht worden.

2. Anm. Die Lehre vom Maximum und Minimum einer gegebenen Funktion ist übrigens für die Ausübung von größter Wichtigkeit z. B. bei Beantwortung der Frage: welches ist die vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Wasserrades, zu der nämlich der größtmögliche Effekt gehört? Uebrigens wird diese Lehre von andern Schriftstellern nur mittelst Anwendung der Differentialrechnung vorgetragen, wo auch wir auf sie zurückkommen werden, weil sie auf kürzerem Wege zum Ziele führt.

Zweiter Theil

Analysis des Unendlichen.

Analysis des Unendlichen.

I. Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Von den Veränderungen, welche die Form einer Funktion leidet, wenn sich die in der Funktion vorkommenden veränderlichen Größen wirklich oder auch nur im Ausdrucke ändern, und daraus abgeleitete Differentialausdrücke.

§. 119.

x und y seyen von einander abhängige veränderliche Größen und Z eine Funktion von x und y, so lassen sich die Funktionen veränderlicher Größen auf folgende einfache Formen reduciren:

$$1)\quad Z = xy$$

$$2)\quad Z = \frac{x}{y}$$

$$3)\quad Z = x^n$$

Aendert sich nun x oder y, so ändert sich zugleich Z auf eine bestimmte Weise.

Es sey z. B. $x = 5$, $y = 9$, also (No. 1.) $Z = 45$, nämlich

$$45 = 5 \cdot 9$$

Leiden nun die Faktoren 5 und 9 Aenderungen, so druckt man solche durch $\Delta 5$, $\Delta 9$ aus, und die zugehörige Aenderung von 45 durch $\Delta 45$, und es wird

$$45 + \Delta 45 = (5 + \Delta 5) . (9 + \Delta 9)$$

Steht z. B. die Größe, auf welche sich die Zahl 9 bezieht, mit der, auf welche sich die 5 bezieht, in einer solchen Verbindung, daß aus 9 die $9 + 2$ wird, wenn sich die 5 in die $5 + 1$ verändert, so wird

$$45 + \Delta 45 = (5 + 1) . (9 + 2)$$
$$= 5 . 9 + 5 . 2 + 9 . 1 + 1 . 2$$

also

$$\Delta 45 = 5 . 2 + 9 . 1 + 1 . 2 = 21.$$

Der Werth von $\Delta 45$ besteht aus 3 Gliedern

$$5 . 2;\ 9 . 1;\ 1 . 2$$

oder die allgemeine Form von $\Delta (xy)$ ist

$$x . \Delta y + y . \Delta x + \Delta x . \Delta y$$

Ist nämlich $\mathfrak{X} = xy$, so wird

$$\mathfrak{X} + \Delta \mathfrak{X} = (x + \Delta x) . (y + \Delta y)$$
$$= xy + x \Delta y + y . \Delta x + \Delta x . \Delta y$$

Folglich, weil $\mathfrak{X} = xy$ ist,

$$\Delta \mathfrak{X} = x \Delta y + y \Delta x + \Delta x . \Delta y .$$

oder

LXIV. $$\Delta (xy) = x . \Delta y + y \Delta x + \Delta x . \Delta y$$

§. 120.

Auf diesem so einfachen arithmetischen Satze und dem $\frac{a . N}{N} = a$ beruht die ganze Analysis des Unendlichen. Je kleiner Δx und Δy genommen werden, einen desto kleineren oliquoten Theil macht $\Delta x . \Delta y$ vom ganzen Ausdruck (LXIV zur Rechten) aus, und um soviel genauer wird

$$\Delta (xy) = x . \Delta y + y \Delta x$$

Bedingt man so kleine Aenderungen für Δx und Δy, daß noch kleinere durch keine angebliche Größe ausgedruckt wer-

den können, so daß den zusammengehörigen Aenderungen Δx und Δy bei ihrer Verkleinerung keine andere Gränze als die 0 (Null) vorgeschrieben ist, so heißt eine solche hypothetisch angenommene Aenderung unendlich klein, und Leibnitz bediente sich zur Bezeichnung einer solchen unendlich kleinen Aenderung des d statt des Δ. In dieser Bezeichnung hat man also

$$\text{LXV.} \quad d(xy) = xdy + ydx$$

Die Gleichung LXIV heißt eine Differenzgleichung, die LXV eine Differentialgleichung; dx, dy, d(xy) heißen Differentialien von x, y, xy.

Eigentlich wäre

$$\frac{d(xy)}{xdy + ydx} = 1 + \frac{dx.dy}{xdy + ydx}$$

Weil aber vermöge der Bedingung $\frac{dx.dy}{x.dy + ydx}$ kein denkbarer Theil von 1 seyn soll, sondern ein so kleiner Bruch, daß er, sovielmal genommen als uns zu denken nur immer möglich wäre, doch immer ein unermeßlich kleiner Theil der Einheit bleibt, so wird hiermit zugleich offenbar bedungen, daß $\frac{dx.dy}{xdy + ydx}$ ein Ausdruck seyn soll, der, auch beibehalten, auf alle Resultate, die aus der Gleichung

$$\frac{dxy}{xdy + ydx} = 1$$

gefolgert werden, durchaus keinen Einfluß haben kann. Man hat also die Gleichung LXV als eine solche anzusehen, welche der mathematischen Schärfe völlig Genüge thut.

§. 121.

Hieraus giebt sich nun auch d(xyz). Es sey nämlich $xy = v$, so hat man

$$d(vz) = v.dz + z.dv$$
$$= xydz + z.d(xy)$$
$$= xydz + z.(xdy + ydx)$$
$$= xydz + xzdy + yzdx$$

u. s. f.

§. 122.

Ist $x = y = z$, so wird

$$d(xyz) = d(xxx) = xxdx + xxdx + xxdx$$

oder

$$d(x^3) = 3x^2dx$$

LXVI. $dx^n = n.x^{n-1}dx$

§. 123.

Auch wird

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x.y^{-1}) = x.d(y^{-1}) + y^{-1}.dx$$
$$= x.(-1.y^{-2}dy) + y^{-1}.dx$$
$$= -\frac{xdy}{y^2} + \frac{dx}{y}$$

oder

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

§. 122. *)

Ist a eine unveränderliche Größe, so wird

$$\Delta(a + x) = \Delta x$$

Daher auch

LXVII. $d(a + x) = dx$

Ebenso

$$\Delta(a + x + y) = \Delta x + \Delta y$$

folglich auch

LXVIII. $d(a + x + y) = dx + dy$

Ferner

$$\Delta(ax) = a \cdot \Delta x'$$

demnach auch

LXIX. $d(ax) = a\,dx.$

Und

$$d\left(\frac{a}{x}\right) = d.(a \times x^{-1}) = a \cdot dx^{-1}$$

$$= a.(-1 \cdot x^{-2}\,d\bar{x})$$

oder

LXX. $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{-dx}{x^2}$

Endlich

$$\Delta\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\Delta x}{a}$$

also auch

LXXI. $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a}$

Aus den bisherigen Differentialausdrücken lassen sich die Differentialien aller möglichen Funktionen veränderlicher Größen leicht angeben.

§. 123.*

Im bisherigen sind die Gründe der Differentialrechnung nach Leibnitzens Ansichten enthalten. Für alle Fälle der Anwendung auf stetige Größen sind sie in der Ausübung vollkommen genügend. Aber in Bezug auf wissenschaftliche Begründung sind sie Zweifeln unterworfen. Entweder sind Differentialien in aller Strenge $= 0$, oder sie bleiben, so klein sie auch immer angenommen werden mögen, endliche Größen von irgend einer Quantität. Im erstern

Falle könnte man fragen, wie es zugehe, daß $\frac{dx}{dy}$ einen bestimmten Quotient geben könne? Es sey z. B. $y = ax^2$, so ist $dy = a \cdot 2x \cdot dx$, also $\frac{dy}{dx} = 2ax$ oder $\frac{0}{0} = 2ax$. Im letzteren Falle ist es offenbar nicht gestattet, statt

$$d(xy) = xdy + ydx + dx \cdot dy$$

die

$$d(xy) = xdy + ydx$$

gelten zu lassen; denn wofern nicht dx und dy in aller Strenge $= 0$ sind, so sind xdy, ydx und $dx \cdot dy$ endliche Größen, so klein sie auch immer seyn mögen; in der letzteren Gleichung für $d(xy)$ fehlt also irgend eine bestimmte Quantität, und sie ist nicht in mathematischer Schärfe richtig.

Ist $dx = 0$, so ist nicht abzusehen, warum man nicht auch $d(xy)$ schlechthin $= xdy$ oder $= ydx$ setzen könne, und wie überhaupt aus LXIV für die Voraussetzung, daß Δx und Δy Nulle seyen, also x und y sich nicht ändern solle, dennoch ein Ausdruck für die Form dieser Nichtänderung gefordert werden könne; auch verdient dann der Ausdruck $d(ax) = adx + xda = adx$ noch eine besondere Rechtfertigung, indem adx alsdann nicht weniger $= 0$ ist als $x \cdot da$.

Um allen dergleichen Erinnerungen auszuweichen, gründete Lagrange die Differentialrechnung auf Betrachtungen, die keine Zweifel der Art zu lassen. Wir finden solche in seiner Theorie der Funktionen. So sehr ich die Talente dieses großen Analytikers und insbesondere auch diese Theorie der Funktionen zu schätzen weiß, so wenig konnte ich doch schon seit der ersten Bekanntmachung dieses Meisterwerks den Wunsch beseitigen, so einfache Lehren, wie

die Grundlehren der Differentialrechnung sind, auf eine einfachere Weise aus den ersten arithmetischen Axiomen so abgeleitet zu sehen, daß hiermit zugleich jene Zweifel gegen die Leibnitzische Darstellung gehoben würden. Ich habe daher einen eigenen Weg eingeschlagen, um zu jenen allgemeinen Differentialformeln zu gelangen, welcher nach meiner Einsicht jenen Forderungen vollkommen Genüge thut.

§. 123. ***

Ich gründe alle hierher gehörige Untersuchungen auf das einzige arithmetische Axiom

$$\text{LXXII.} \quad \frac{x \cdot z}{z} = x$$

Dieser Ausdruck ist in der größten Allgemeinheit gültig, was auch z bedeuten mag.

Man muß hierbei bemerken, daß es nicht einmal darauf ankommt, ob den einzelnen Operationen, welche der Ausdruck z erfordert, Genüge geschehen könne oder nicht, weil die Formel keineswegs successive Operationen vorschreibt, sondern gleiche entgegengesetzte Aenderungen (Multiplikation mit z und Division mit z) ausspricht, die sich gegenseitig aufheben, so daß die eine nur andeutet, die andere solle nicht vorgenommen werden. Der Satz heißt in seiner größten Allgemeinheit

„Gleiche entgegengesetzte verlangte oder angedeutete Aen-
„derungen einer Größe lassen solche ungeändert."

Wir haben hiervon schon in dem 1ten Theile dieser Schrift unzähligemal Gebrauch gemacht. So ist z. B.

$$(\sqrt{-a})^2 = -a; \quad (\sqrt{-4})^2 = -4;$$

Diese Gleichung fordert nicht, daß erst die Quadratwurzel aus — 4 gezogen, und dann die gefundene Zahl quadrirt werden solle; sondern der Exponent vernichtet das Wurzel-

zeichen, er zeigt an, daß man die Wurzelausziehung nicht vornehmen, sondern die — a ungeändert lassen solle.

Setzen wir a — b statt z, und a + b statt x (LXXII), so wird

$$\frac{(a + b).(a - b)}{a - b} \equiv a + b$$

oder

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} \equiv a + b$$

Diese Formel behält ihre allgemeine Richtigkeit, was auch a und b bedeuten mögen, es mag $a > b$ oder $a < b$ oder $a \equiv b$ seyn. Also ist auch noch

$$\frac{a^2 - a^2}{a - a} \equiv a + a \equiv 2a$$

Es kommt hierbei blos auf äquivalente Formen von Ausdrücken an, so daß die ursprüngliche Form einer Funktion nicht aus den Augen gesetzt werden darf. So ist z. B. a mit $\frac{a.(a - a)}{a - a}$ völlig gleich geltend. Man darf aber nicht $a.(a - a)$ in die Form $a^2 - a^2$ bringen, und dann $\frac{a^2 - a^2}{a - a} \equiv a + a \equiv 2a$ setzen. Es ist nämlich allgemein $m.(a - a) \equiv ma - ma$, und $\frac{m.(a - a)}{a - a} \equiv \frac{ma - ma}{a - a}$, eine Form, die nie in die $2a$ übergehen kann, außer wenn $m \equiv 2a$ ist; sie bleibt nämlich allemal mit der $\frac{m(a - a)}{a - a}$ also mit m einerlei; ist daher $m \equiv 2a$, so bleibt auch noch $\frac{m.(a - a)}{a - a} \equiv 2a$, also

in diesem Falle $\frac{2a^2 - 2a^2}{a - a} \left(= \frac{2a.(a-a)}{a-a}\right) = 2a.$

Hätte man

$$\frac{m.(a-b).x}{n.(a-x)} = y$$

so daß für jeden Werth von x diese Gleichung ihre Richtigkeit hätte, so müßte sie auch noch für $x = b$ gelten; dann hätte man aber

$$y = \frac{m.(a-b).b}{n.(a-b)} = \frac{mb}{n}$$

In der Geometrie findet man für den kubischen Inhalt k eines abgekürzten Kegels von der Höhe a

$$k = \tfrac{1}{3}\, a.\, 0{,}785.. \frac{D^3 - d^3}{D - d}$$

wo D den unteren, und d den oberen Durchmesser bezeichnet. Da diese Gleichung allgemein gültig ist, so muß sie auch noch für $d = D$ oder für einen Cylinder gelten. Für diesen Fall wird aber

$$k = \tfrac{1}{3}\, a.\, 0{,}785 \cdot \frac{D^3 - D^3}{D - D}$$

Um nun zu einem bestimmten Werthe zu gelangen, gehen wir zur ursprünglichen Form $\frac{D^3 - d^3}{D - d}$ zurück.

Die wirkliche Division giebt den Quotient

$$D^2 + Dd + d^2$$

Also allgemein

$$\left(\begin{matrix} k = \tfrac{1}{3}\, a.\, 0{,}785. \\ (D^2 + Dd + d^2) \end{matrix}\right)$$

Setze man nun $d = D$, so wird

$$\begin{array}{l|l} D - d & D^3 - d^3\ (D^2 + Dd + d^2 \\ & \underline{D^3 - D^2 d} \\ & D^2 d - d^3 \\ & \underline{D^2 d - D d^2} \\ & D d^2 - d^3 \\ & \underline{D d^2 - d^3} \\ & \ast \qquad \ast \end{array}$$

$$k = \frac{1}{3} a \cdot 0{,}785 \cdot 3D^2 = a \cdot 0{,}785 \cdot D^2$$

Hier ist also $\frac{D^3 - D^3}{D - D} = 3 \cdot D^2$.

Ein anderes Beispiel nehme ich aus meinen Grundlehren der mechanischen Wissenschaften S. 428. Bei einem Flaschenzuge berührt das Seil jede Rolle in einem gewissen Theile des Umfangs, dessen Sehne dort mit S bezeichnet wird; der Halbmesser einer Rolle wird mit R bezeichnet; wenn nun die angebrachte Last mit Q und die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft mit P angedeutet wird, für S und R die mittleren Werthe genommen, und alle Nebenhindernisse bei Seite gesetzt werden, so findet man dort

$$Q = \frac{R^2 \cdot (R^{2n} - R^{2n})}{R^{2n} \cdot (R^2 - R^2)} \cdot \frac{S}{R} \cdot P$$

wo n die Anzahl von Rollen in jeder Flasche ausdruckt. Rückgang auf die ursprüngliche allgemeine Form, welche wir durch $\frac{R^{2n} - B^{2n}}{R^2 - B^2}$ ausdrucken können, giebt uns einen bestimmten Werth auch für den Fall, wo $B = R$ wird. Die wirkliche Division giebt nämlich, wie wir §. 123. No. III. sehen werden, den Quotient $n \cdot R^{2n-2}$, wenn wir in ihm $B = R$ setzen;

also $R^{2n} - R^{2n} = n \cdot R^{2n-2} (R^2 - R^2)$, und

$$Q = \frac{R^2 \cdot n \cdot R^{2n-2} \cdot (R^2 - R^2) \cdot S}{R^{2n} \cdot (R^2 - R^2) \cdot R} \cdot P$$

$$= \frac{nS}{R} \cdot P$$

§. 124.

Die Beispiele des vorstehenden §. zeigen hinlänglich, wie Brüche, selbst in Fällen, wo ihre Zähler und Nenner $= 0$ werden, dennoch bestimmte Werthe behalten, wie

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b, \text{ und } \frac{a^2 - a^2}{a - a} = 2a$$

$$\frac{m.(a - b).x}{n.(a - x)} = \frac{mb}{n} \text{ wenn } x = b \text{ wird}$$

$$\frac{D^3 - D^3}{D - D} = 3.D^2$$

$$\frac{R^{2n} - R^{2n}}{R^2 - R^2} = n.R^{2n-2}$$

Hier scheint jeder Bruch durch $\frac{0}{0}$ ausgedruckt werden zu können. Aber z. B. $\frac{a^2 - a^2}{a - a}$ durch $\frac{0}{0}$ ausdrucken hieße die bestimmte Form dieses Bruchs auf eine unbestimmte bringen, aus der die ursprüngliche, die zu einem bestimmten Werthe führt, nicht mehr zu erkennen wäre. Es ist nämlich $a^2 - a^2$ nicht schlechthin $= 0$, sondern $= (a + a).(a - a)$, also die Form

$$\frac{a^2 - a^2}{a - a} \text{ einerlei mit } \frac{(a + a).(a - a)}{1.(a - a)}$$

daher einerlei mit $a + a$ oder $2a$ (LXXII).

Die gleichzeitige Multiplikation und Division mit $a - a$ fordert keineswegs, daß erst mit $a - a$ multiplicirt und hiermit der Dividend auf Null gebracht, und dann mit der Null des Divisors dividirt werden solle; sondern die entgegengesetzten Operationen heben einander gegenseitig auf; die Multiplikation mit $a - a$ zeigt nur an, daß die Division mit $a - a$ unterbleiben soll; oder die Division mit $a - a$ ist

eine Forderung, daß die Multiplikation nicht geschehen, also allemal die Größe $a + a$ oder $2a$ ungeändert bleiben solle. Diese Forderung die aus dem unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder selbst aus der Form $\frac{a^2 - a^2}{a - a}$ nicht sogleich von einem Ungeübten erkannt wird, ergiebt sich aus der Entwickelung $\frac{(a + a).(a - a)}{1.(a - a)}$, die nothwendig mit $a + a$ oder $2a$ einerlei ist.

Ist man also im Stande, einen Bruch, der in $\frac{0}{0}$ übergeht, wenn die im Zähler und Nenner im Allgemeinen angedeuteten Operationen wirklich vorgenommen werden, auf die Form $\frac{X.(x - x)}{Y.(x - x)}$ zu reduciren, so erhält man damit allemal den bestimmten Werth $\frac{X}{Y}$, wo X und Y Funktionen von der veränderlichen x bezeichnen.

Weil nun $\frac{X}{Y}$ selbst wieder eine Funktion von x seyn muß, die wir durch (fx) ausdrucken können, so kommt es in solchen Fällen darauf an, den Bruch, welcher $= \frac{0}{0}$ werden würde, auf die allgemeine Form $\frac{(fx).(x - x)}{x - x}$ bringen zu können, da dann sein Werth $= (fx)$ wäre. Die allgemeine Methode, wodurch dieses geschieht, heißt die Differentialrechnung; sie lehrt überhaupt einen Ausdruck von der Form $\frac{X - X}{Y - Y}$ auf die $\frac{(fx).(x - x)}{x - x}$ bringen, und zeigt zugleich die nützlichen Anwendungen,

welche sich von solchen Reduktionen machen lassen. Ausdrücke wie $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}$, $Y - Y$, $x - x$, $y - y$ (wo $\mathfrak{X}$, Y, x, y allemal Funktionen von einander sind) heißen nun Differentialien von $\mathfrak{X}$, Y, x, y; der Quotient $\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{X}}{Y - Y}$ ist ein Differentialquotient, und wird auch durch $\frac{d\mathfrak{X}}{dY}$, wie $x - x$ und $y - y$ durch dx und dy ausgedruckt. Differentialien sind also ohne Widerrede in aller Strenge $= 0$; allemal ist

$$d\mathfrak{X} = \mathfrak{X} - \mathfrak{X} = 0$$
$$dY = Y - Y = 0$$

wie die Ausdrücke $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}$ unmögliche Größen sind.

Wie aber $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-1}}{1 \cdot \sqrt{-1}} = 2$ also eine bestimmte Größe ist, weil durch die Division mit $\sqrt{-1}$ nur angezeigt wird, daß die Zahl 2 im Zähler nicht mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, sondern unverändert bleiben soll, so ist auch $\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{X}}{Y - Y} = \frac{(fx) \cdot (x - x)}{x - x}$ eine bestimmte Größe (fx), weil durch die Division mit $x - x$ zu erkennen gegeben wird, daß jener Akt, wodurch der Zähler $= \mathfrak{X} - \mathfrak{X}$ d. i. $= 0$ wurde, unterbleiben soll. Der Ausdruck $\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{X}}{Y - Y}$ $= \frac{(fx) \cdot (x - x)}{x - x}$ oder $\frac{d\mathfrak{X}}{dY} = \frac{(fx) \cdot dx}{dx} = (fx)$ ist also keineswegs eine Nullenrechnung, sondern er giebt zu erkennen 1) wie der Zähler $= 0$ geworden; 2) daß der Akt, durch welchen der Zähler auf 0 kommt oder gekommen ist, unterbleiben und der bestimmte Faktor (fx) unverändert bleiben soll. Alles ist einfache Anwendung und

nothwendige Folge aus (LXXII), so daß nur noch gezeigt werden muß, wie $\frac{dX}{dY}$ auf die Form $\frac{(fx).dx}{dx}$ gebracht werden könne.

§. 125.

Aufg. Die einfachen Differentialquotienten

I. $\frac{d(xy)}{dx}$ wo y eine Funktion von x ist

II. $\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{dx}$

III. $\frac{d(x^n)}{dx}$

anzugeben.

Aufl. Zu No. I. Weil x und y veränderliche Größen sind, so wollen wir zwei verschiedene Werthe von x mit $x_,$ und $x_{,,}$ bezeichnen, und die beiden zugehörigen Werthe von y mit $y_,$ und $y_{,,}$, so giebt die wirkliche Division

$$\frac{x_, \cdot y_, - x_{,,} \cdot y_{,,}}{x_, - x_{,,}} = y_, + \frac{y_, - y_{,,}}{x_, - x_{,,}} \cdot x_, \quad (\mathfrak{C})$$

Da diese Gleichung ihre allgemeine Richtigkeit hat, so muß sie auch noch für $x_{,,} = x_,$ und $y_{,,} = y_,$ gelten; für diesen Fall erhält man aber aus $(\mathfrak{C})$

$$\frac{x_, y_, - xy}{x_, - x_,} = y_, + \frac{y_, - y_,}{x_, - x_,} \cdot x_,$$

wo x und $y_,$ alle mögliche zusammengehörige Werthe von x und y bezeichnen.

Also allgemein

$$\frac{xy - xy}{x - x} = y + \frac{y - y}{x - x} \cdot x$$

oder

LXXIII. $\frac{d(xy)}{dx} = y + \frac{dy}{dx} \cdot x$

welches der gesuchte Differentialquotient ist.

Man druckt nun dieselben Relationen auch so aus

XXXIV. $d(xy) = y\,dx + x\,dy$

Man setzt voraus, daß sich y selbst als eine Funktion von x durch (ϕx), und $d(\phi x)$ wieder durch $(\phi' x) \cdot dx$ (wo $(\phi' x)$ gleichfalls eine Funktion von x bezeichnet) ausdrucken läßt, so daß man auch

$$d(xy) = (\phi x) \cdot dx + x \cdot (\phi' x) \cdot dx$$

erhält.

Da nun $(\phi x) + (\phi' x)$ wieder eine Funktion von x ist, die sich durch (fx) ausdrucken läßt, so hat man auch

LXXV. $dxy = (fx) \cdot dx$

Zu No. II. Man setze $\frac{x}{y} = z$, so wird $x = yz$

und $dx = y\,dz + z\,dy = y\,dz + \frac{x}{y}\,dy$, demnach

$$y\,dx = y^2\,dz + x\,dy$$

und

LXXVI. dz oder $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

Auch hier läßt sich wie vorhin y durch (ϕx) und $d(\phi x)$ durch $(\phi' x) \cdot dx$ ausdrucken, also

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(\phi x) \cdot dx - (\phi' x)\,x\,dx}{(\phi x)^2}$$

Da nun $\frac{((\phi x) - (\phi' x) \cdot x)}{(\phi x)^2}$ wieder eine Funktion von x ist, die wir durch (fx) ausdrucken können, so hat man auch

LXXVII. $d\left(\frac{x}{y}\right) = (fx) \cdot dx$

Zu No. III. Es sey x in irgend einem anderen Zustande $= v$, so ergiebt sich durch wirkliche Division

$$\frac{x^n - v^n}{x - v} = x^{n-1} + x^{n-2} v + x^{n-3} v^2 \ldots + x^0 v^{n-1}$$

wo n Glieder im Quotient gefunden werden, weil die Division abbricht, sobald man dabei auf den Rest $x^{1-n} \cdot v^n - v^n$ kommt.

Jetzt setze man $v = x$, so folgt

$$\frac{x^n - x^n}{x - x} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} \ldots + x^{n-1}$$

Da nun der Quotient n Glieder haben muß, was auch v für einen Werth haben mag, so hat man

$$\frac{x^n - x^n}{x - x} = n \cdot x^{n-1}$$

oder

$$\text{LXXVIII.} \quad \frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Daher auch

$$d(x^n) = n \cdot x^{n-1} dx$$

Aber diese Ableitung setzt voraus, daß n eine ganze Zahl sey.

Es sey nun auch m eine ganze Zahl, wo $w = u^{\frac{n}{m}}$, so hat man $w^m = u^n$, also

$$m w^{m-1} dw = n \cdot u^{n-1} du$$

oder

$$m \cdot (u^{\frac{n}{m}})^{m-1} \cdot dw = n \cdot u^{n-1} du$$

oder auch

$$m \cdot u^{n-\frac{n}{m}} \cdot dw = n \cdot u^{n-1} du$$

also

$$dw = \frac{n \cdot u^{n-1} du}{m \cdot u^{n-\frac{n}{m}}}$$

oder

$$d\left(u^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{n}{m} \cdot u^{\frac{n}{m}-1} \cdot du$$

Also

$$d\left(u^{r}\right) = r \cdot u^{r-1} du$$

Es mag r eine ganze oder gebrochene bejahte Zahl seyn.

Es könnte aber auch r einen verneinten Werth haben; dann wird

$$d\left(\frac{1}{u^{n}}\right) \text{ (oder } d\left(u^{-n}\right)\text{) aus LXXVI}$$

$$= \frac{0 - 1 \cdot d\left(u^{n}\right)}{u^{2n}} = -u^{-2n} \cdot n u^{n-1} du$$

$$= -n u^{-n-1} du$$

Folglich in der größten Allgemeinheit

LXXIX. $d\left(x^{n}\right) = n x^{n-1} dx$

oder auch für diesen Fall

$$d\left(x^{n}\right) = (fx) \cdot dx$$

§. 126.

Die 3 einfachen Formeln

$$d(xy) = x dy + y dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x dy - y dx}{y^{2}}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx.$$

dienen nun in allen Fällen die Differentialgleichung

$$d\mathfrak{X} = (fx).\,dx$$

bestimmt auszudrucken, sobald die Form von $\mathfrak{X}$ gegeben ist; und diesen Ausdruck für $d\mathfrak{X}$ finden, heißt die Funktionen $\mathfrak{X}$ differentiiren.

§. 127.

Wenn die veränderliche Größe in einem gewissen Zustande durch x, in einem anderen durch u ausgedruckt, und die Funktion der veränderlichen Größe in Bezug auf x mit $\mathfrak{X}$, und in Bezug auf u mit U bezeichnet wird, so könnte der Werth von $\mathfrak{X}$ aus veränderlichen (von x abhängigen) und aus unveränderlichen oder beständigen (von x unabhängigen) Gliedern zusammengesetzt seyn. Die Summe der veränderlichen können wir durch (ϕx), die der beständigen durch C ausdrucken; hiermit erhalten wir die allgemeine Differenzgleichung

$$\mathfrak{X} - U = ((\phi x) + C) - ((\phi u) + C)$$

oder

$$\Delta\mathfrak{X} = (\phi x) - (\phi u)$$

also, wenn $u = x$ genommen wird,

$$d\mathfrak{X} = d(\phi x)$$

oder

LXXX. $$d((\phi x) + C) = d(\phi x)$$

Ein in einer Funktion vorkommendes oder eigentlich zur Funktion noch hinzukommendes Glied hat also auf die Form des Differentials gar keinen Einfluß. Es ist $d(x + C)$ mit dx ganz einerlei; daher auch $d(xy + C) = x\,dy + y\,dx$; $d\left(\frac{x}{y} + C\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ u. s. f.

§. 128.

Wäre $\mathfrak{X} = a(\phi x) + C$, also $U = a(\phi u) + C$, so daß o gleichfalls eine unveränderliche Größe wäre, so hätte man

$$X - U \text{ oder } \Delta \mathfrak{X} = (a(\phi x) + C) - (a(\phi u) + C)$$
$$= a((\phi x) - (\phi u))$$

also für $U = \mathfrak{X}$

$$d\mathfrak{X} = a\,d(\phi x)$$

oder

LXXXI. $d(a(\phi x) + C) = a \cdot d(\phi x)$

Anm. Ich erinnere mich noch einer Recension von etwa 36 Jahren her, wo der Recensent sich äußerte, $d\mathfrak{X}$ und dC seyen gerade deßhalb von einander verschieden, weil $d\mathfrak{X}$ noch eine unendlich kleine Größe und nicht in aller Schärfe $= o$, hingegen dC nothwendig in aller Strenge $= o$ sey. Das bisherige zeigt das Falsche in dieser Vorstellung. Wenn von $d\mathfrak{X}$ die Rede ist, so wird eigentlich nach $(fx) \cdot dx$ gefragt, um $d\mathfrak{X}$ mit dx vergleichen oder den Quotient $\frac{d\mathfrak{X}}{dx}$ so angeben zu können, wie er der Form von $\mathfrak{X}$ entspricht, aber der Ausdruck dC ist der Auflösung in $(fx) \cdot dx$ nicht fähig, es bleibt allemal $dC = o \cdot dx$. Die Größe $d\mathfrak{X}$ ist für sich so genau als die $x - x$ oder $a - a = o$; aber $\frac{d\mathfrak{X}}{dx}$ ist ein arithmetischer Ausdruck, dessen Nenner den Faktor, welcher den Zähler zu Null macht, wegschafft und hiermit eine bestimmte Größe herstellt, wie in $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ der Nenner ein Ausdruck ist, welcher den Faktor, der den Zähler zu einer unmöglichen Größe macht,

wegschafft, weil $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1}}{b^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$

ist. In der §. 127. gebrauchten Bedeutung der Buchstaben hat $\frac{X - U}{x - u}$ allemal einen bestimmten Werth, oder der Quotient $\frac{\Delta X}{\Delta x}$ ist allemal eine bestimmte Größe, und diese bleibt, wie wir gesehen haben, auch noch dann bestimmt, wann $u = x$ wird, wo sie dann allemal von der Form der Funktion X abhängt. In der Differentialrechnung wird aber insbesondere der Quotient für den Fall verlangt, wann $u = x$ gesetzt wird. Von den Quantitäten, auf welche sich Zähler und Nenner beziehen, ist hierbei gar nicht die Rede, sondern blos von der Frage: Wenn $x - u$ als die Einheit angenommen wird, wie groß ist dann $X - U$? und insbesondere: wie groß ist dann $X - U$, wann $u = x$ gesetzt wird, also $x - x$ für die Einheit gilt? Wir wissen zwar, daß $x - x = o$ ist, aber auf dieses Wissen, wird in allen bisherigen Rechnungen gar keine Rücksicht genommen, sondern blos darauf, daß in den allgemeinen Ausdrücken, welche u und U enthalten, x statt u und X statt U gesetzt werden soll: Der Erfolg wird blos den Resultaten der gemeinen Buchstabenrechnung und den Axiomen der Arithmetik überlassen. Wir fragen also nicht, in welchem Verhältniß eine nicht vorgenommene oder unterlassene Aenderung von X zu einer unterlassenen Aenderung von x stehe? sondern wie der arithmetische Ausdruck $X - U$ sich zu dem $x - u$ in dem Falle verhalte, wann $u = x$ werde? ohne im mindesten auf die Objekte

Rücksicht zu nehmen, auf welche sich dann Zähler und Nenner beziehen. Wir vergleichen nicht die bezeichneten Objekte, sondern die Ausdrücke, welche zur Bezeichnung gebraucht werden, unter einander, und folgen in dieser Vergleichung blos den unwidersprechlichen Lehren der Arithmetik, so daß kein Irthum dabei möglich ist. So ist also die Differentialrechnung keine Nullenrechnung, sie enthält nichts geheimnißvolles, ist vielmehr eine nur sehr einfache Anwendung der Buchstabenrechnung und beruht wie diese auf allgemein anerkannten arithmetischen Axiomen, und könnte schon in jeder Anleitung zur Buchstabenrechnung vorgetragen werden. Die Betrachtung unendlich kleiner Größen fällt dabei ganz weg, und sie giebt durchaus keine Veranlassung zu jener älteren Abtheilung der Analysis in die des Endlichen und des Unendlichen.

§. 129.

Wir haben noch einen besonderen Differentialausdruck übrig, dessen Ursprung durch eine eigene Betrachtung gefunden werden muß, nämlich

$$\frac{dx}{x}$$

Setzt man $1 + z$ statt x, so wird

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{1}{1+z} \cdot dz = (1 - z + z^2 - z^2 \ldots) \cdot dz \; (\odot$$

Es ist aber (§. 107. No. 2.)

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \ldots = \log n. (z + 1)$$

also, wenn man auf beiden Seiten differentiirt,

$$(1 - z + a^2 - z^3 + z^4 \ldots) \cdot dz = d \log n. (z + 1)$$

Dieses in (ℏ) gesetzt, giebt

$$\frac{dz}{1+z} \text{ oder } \frac{d(z+1)}{z+1} = d \log n.(z+1$$

also allgemein

$$\text{LXXXII.} \quad \frac{dx}{x} = d \log n. x$$

Um indessen diese wichtige Formel nicht auf die §. 107. vorgekommene Deduktion zu gründen, welche wieder auf vorhergegangene Entwickelungen gebaut war, dient nachstehende ganz elementarische Darstellung.

Lehrs. Es giebt ein Logarithmensystem, für welches $\frac{dx}{x} = d \log. x$ ist, was auch x für eine Zahl seyn mag.

Bew. z mag, wie x, welche Zahl man will bezeichnen. Wird nun $x + \Delta x$ aus x, so wird $\Delta \log. x = \log.(x+\Delta x) - \log. x = \log. \frac{x+\Delta x}{x} = \log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$, und ebenso $\Delta \log. z = \log.\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)$.

Aus der Elementarlehre von den Logarithmen (§. 31.) wissen wir schon, daß für Zahlen, die einander sehr nahe liegen (z. B. 1 und 1,0001; 1 und 1,00001) die Differenz der Logarithmen sehr nahe der Differenz der zugehörigen Zahlen proportional ist. Also, je kleiner $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta z}{z}$ ist, desto genauer

$$\left(\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) - \log. 1\right) : \left(\log.\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right) - \log. 1\right)$$
$$= \left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) - 1\right) : \left(\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right) - 1\right)$$

oder, weil $\log. 1 = 0$ ist,

$$\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right):\log.\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)=\frac{\Delta x}{x}:\frac{\Delta z}{z}$$

Nimmt man also gleiche Aenderungen von x und z (z. B. $x=10000$, $x+\Delta x=10001$; $z=100000$, $z+\Delta z=100001$) so hat man sehr nahe

$$\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right):\log.\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)=z:x$$

Es ist aber $\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\Delta\log. x$, und $\log.\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)=\Delta\log. z$, also sehr nahe

$$\Delta\log. x:\Delta\log. z=z:x$$

und

$$x.\Delta\log. x=z.\Delta\log. z$$

also in aller Schärfe

$$x.\,d\log. x=z.\,d\log. z \quad (\hbar)$$

Es muß also $x.\,d\log. x$ so wie $z.\,d\log. z$ nothwendig eine unveränderliche Größe seyn, wie $x.\Delta\log. x$ und $z.\Delta\log. z$ beinahe unveränderlich sind, wenn $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta z}{z}$ sehr klein genommen werden, und $\Delta z=\Delta x$ ist.

Weil nun $dx=dz$ seyn soll, so folgt aus $(\hbar)$

$$\frac{dx}{x.\,d\log. x}=\frac{dz}{z.\,d\log. z}$$

und

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z.\,d\log. z}.\,d\log. x$$

Weil aber sowohl dz als $z.\,d\log. z$ unveränderlich bleibt, so können wir eine unveränderliche Größe a statt $\frac{dz}{z.\,d\log. z}$ setzen; dieses giebt

$$\frac{dx}{x} = a \,.\, d \log. x \quad (\dagger$$

wo a bei einem angenommenen Logarithmensystem für alle mögliche Werthe von x unveränderlich bleibt. Nur für jedes andere Logarithmensystem erhält auch a einen anderen Werth.

Die Gleichung (†) erhält aber die einfachste Form, wenn wir ein solches Logarithmensystem wählen, für welches $a = 1$ wird. Dann hat man schlechthin

$$\frac{dx}{x} = d \log. x$$

Ein solches Logarithmensystem heißt das natürliche (das hyperbolische, und bei französischen Schriftstellern das Nepersche). Die zu demselben gehörige Logarithmen heißen daher auch natürliche, und man schreibt nunmehr

$$\frac{dx}{x} = d \text{ lognat. } x \text{ oder} = d \text{ ln. } x$$

§. 129.

Setzt man $1 + y$ statt x, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{1+y} dy = (1 - y + y^2 - y^3 \ldots.) dy$$

Und weil allgemein (LXXIX) $d(x^{r+1}) = (r+1) x^r dx$, also $\frac{d(x^{r+1}}{r+1} = x^r dx$ ist, oder $y^r dy = d \frac{y^{r+1}}{r+1}$, so hat man

$$y \,.\, dy = d\left(\frac{y^2}{2}\right); \; y^2 dy = d\left(\frac{y^3}{3}\right); \; y^3 dy = d\left(\frac{y^4}{4}\right) \text{ etc.}$$

Ueberdas $\frac{dx}{x} = d \text{ logn. } x$, demnach

$$d\,\text{logn.}\,x = dy - d\frac{y^2}{2} + d\frac{y^3}{3} - d\frac{y^4}{4} + \text{etc.}$$

also

$$\text{logn.}\,x = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \text{etc.}$$

oder

$$\text{logn.}\,x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \text{etc.}$$

woraus nun alle Berechnungen wie §. 107. abgeleitet werden.

Durch Reihenumkehrungen erhält man aus der vorstehenden Gleichung

$$x = 1 + \frac{\text{ln. x}}{1} + \frac{(\text{ln. x})^2}{1.2} + \frac{(\text{ln. x})^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Ist nun e die Zahl, deren natürliche Logarithme = 1 ist, so hat man, e statt x gesetzt,

$$e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

$$= 2{,}7182818284\ldots$$

Diese Zahl ist also die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

§. 129. **

Weil $\frac{dx}{x} = d\,\text{logn. x}$ ist, so hat man (§. 129. †)

$$d\,\text{logn. x} = d\,(\text{a . log. x})$$

also

$$\text{logn. x} = \text{a . log. x}$$

wo der Logarithme zur Rechten aus jedem anderen Logarithmensystem genommen werden kann, wenn nur der Koëfficient a gehörig bestimmt wird.

Man hat aber $a = \frac{\text{logn. x}}{\text{log. x}}$. Weis man also den Logarithmen irgend einer Zahl für ein anderes Logarithmensystem z. B. die Basis, die wir mit B bezeichnen wollen so hat man

$$a = \frac{\log n.\ B}{\log.\ B}$$

Für das briggische Logarithmensystem ist B = 10, nämlich log. brigg. 10 = 1, also a = logn. 10 = 2,30258509, wie man ln. 10 in den Schulzischen und Vegaischen Tafeln findet. Demnach allgemein

$$\log n.\ x = 2{,}30258509 \,.\, \log.\ br.\ x$$

und

$$\log.\ br.\ x = \frac{1}{2{,}30258509} \,.\, \log nat.\ x$$
$$= 0{,}43429448 \,.\, lnat.\ x$$

Diese Zahl 0,434.... heißt nun der Model des briggischen Logarithmensystems. Allgemein ist für jedes System, dessen Basis B ist,

$$\log.\ x = \frac{1}{a} \log n.\ x = \frac{1}{\log.\ B} \,.\, \log n.\ x.$$

§. 130.

Formen von Funktionen kennen zu lernen, von welchen gegebene Differentialformen herkommen, bleibt dem Vortrage der Integralrechnung vorbehalten; man gelangt aber leichter zu dieser Kenntniß und vorbereiteter zur Integralrechnung, wenn man mannichfaltige Formen von Funktionen veränderlicher Größen differentiirt. Ich füge zu dem Ende einige Beispiele bei

$$d\,x^m y^n = x^m \,.\, n y^{n-1} dy + y^n \,.\, m x^{m-1} dx$$

$$d\,\frac{ay}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{a x^2 dy - a x y dx}{(x^2 + y^2) \,.\, \sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

$$d\sqrt{(\phi x)} = \frac{d\,(\phi x)}{2\sqrt{\phi x}}$$

Hieraus ergeben sich viele andere z. B.

$$d\sqrt{(ax^3 + bx^3 + cx} = \frac{3ax^2 + 2bx + c}{2\sqrt{(ax^3 + bx^2 + cx)}} . dx$$

u. s. f. Anfänger thun sehr wohl, wenn sie selbst noch mancherlei Formen von Funktionen vornehmen, um sich auch zugleich im Differentiiren zu üben.

Anwendung auf Differentialformen von Funktionen, die zum Kreise gehören.

§. 131.

Die bisherigen Lehren lassen sich leicht auf die Differentiirung trigonometrischer Funktionen anwenden. Der Gebrauch solcher Differentialformen ist uns für die Folge unentbehrlich.

Es sey BD (Fig. 4.) ein unbestimmter Bogen vom Umfange eines mit dem Halbmesser AB = 1 beschriebenen Kreises, und die Größe dieses Bogens, für den Halbmesser = 1 ausgedruckt, = x; also das Perpendikel DE = Sinus des Winkels, welcher zum Bogen x gehört. Wir schreiben dafür abgekürzt DE = Sin. x, ebenso AE = Cos. x

Es sey nun ferner Dd ein von D aus noch hinzu genommenes Bogenstückchen Δx, so wird aus dem Sinus DE der dp, also, wenn po = ED genommen wird, do = Δ Sin. x; zugleich wird aus Kosinus AE der Ap = AE − pE = AE − Do; es gehört also zu $x + \Delta x$ ein Kosinus = Cos. x − Δ Cos. x, oder zur Differenz Δx gehört die Differenz − Δ Cos. x

§. 132.

Zur Bestimmung der Differentialformen trigonometrischer Funktionen dient uns die geometrische Lehre von der

Aehnlichkeit der Dreiecke. Wir können uns Dd so klein denken, daß sehr nahe

$$Dd : Do = DS : oS = AS : pS = AD : DE$$

wird; oder, wenn wir $Bd = x'$, $Ap = \zeta'$, $AE = \zeta$, also $Dd = x' - x$, $Do = pE = \zeta - \zeta'$ ist, so ist sehr nahe

$$(x' - x) : -(\zeta' - \zeta) = AD : DE = 1 : \text{Sin. } x$$

oder

$$\Delta x : -\Delta \text{ Cos. } x = 1 : \text{Sin. } x$$

und

$$\frac{\Delta \text{ Cos. } x}{\Delta x} = -\text{ Sin. } x \quad (\odot$$

Die Form dieses Quotienten wird in aller Schärfe richtig, wenn wir Dd so klein nehmen, daß hiermit die wegen der Krümmung eintretende Abweichung von der Wahrheit beseitiget wird, also, nach Leibnitzens Sprache, wenn Dd unendlich klein genommen wird; nach unserem Vortrage, wenn wir in dem allgemeinen Differenzverhältnisse $(\odot)$ Cos. x — Cos. x und x — x statt Δ Cos. x und Δx schreiben. Wir haben also in aller Schärfe

LXXXIII.
$$\begin{cases} \frac{d \text{ Cos. } x}{dx} = -\text{ Sin. } x, \text{ oder auch} \\ d \text{ Cos. } x = -\text{ Sin. } x \,.\, dx \end{cases}$$

Das verneinte Zeichen im Werthe zeigt nur an, daß Aenderungen von Kosinussen und zugehörigen Bögen einander entgegen gesetzt sind.

Setzt man $DE = y$, $pd = y'$, so ist für ein sehr kleines Dd sehr nahe $Dd : do = AD : AE$, oder

$$(x' - x) : (y' - y) = 1 : \text{Cos. } x$$

und in aller Schärfe

$$dx : dy = 1 : \text{Cos. } x$$

oder

$$dx : d\,\text{Sin.}\ x = 1 : \text{Cos.}\ x$$

also

$$\text{LXXXIV.}\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\text{Sin.}\ x}{dx} = \text{Cos.}\ x, \text{ oder auch} \\ d\,\text{Sin.}\ x = \text{Cos.}\ x \,.\, dx \end{cases}$$

Hieraus erhält man nun ferner

$$d\,\text{tang.}\ x = d\,\frac{\text{Sin.}\ x}{\text{Cos.}\ x} = \frac{\text{Cos.}\ x^2 \,.\, d\,\text{Sin.}\ x + \text{Sin.}\ x^2\, dx}{\text{Cos.}\ x^2}$$

also

$$\text{LXXXV.}\quad d\,\text{tang.}\ x = \frac{dx}{\text{Cos.}\ x^2} = \text{Sec.}\ x^2 \,.\, dx$$

Ebenso

$$d\,\text{Cot.}\ x = d\,\frac{\text{Cos.}\ x}{\text{Sin.}\ x} = \frac{-\,\text{Sin.}\ x^2\, dx - \text{Cos.}\ x^2\, dx}{\text{Sin.}\ x^2}$$

oder

$$\text{LXXXVI.}\quad d\,\text{Cot.}\ x = -\,\frac{dx}{\text{Sin.}\ x^2} = -\,\text{Cosec.}\ x^2 \,.\, dx$$

Auch

$$d\,\text{Sec.}\ x = d\,\frac{1}{\text{Cos.}\ x} = -\,\frac{1 \,.\, d\,\text{Cos.}\ x}{\text{Cos.}\ x^2}$$

$$= \frac{\text{Sin.}\ x \,.\, dx}{\text{Cos.}\ x^2} = \frac{\left(\frac{\text{Sin.}\ x}{\text{Cos.}\ x}\right) \,.\, dx}{\text{Cos.}\ x}$$

Also

$$\text{LXXXVII.}\quad d\,\text{Sec.}\ x = \frac{\text{tang.}\ x \,.\, dx}{\text{Cos.}\ x} \text{ oder auch}$$

$$= \text{tang.}\ x \,.\, \text{Sec.}\ x \,.\, dx$$

Endlich

$$d\,\text{Cosec.}\ x = d\,\frac{1}{\text{Sin.}\ x} = -\,\frac{1 \,.\, d\,\text{Sin.}\ x}{\text{Sin.}\ x^2}$$

$$= -\,\frac{\text{Cos.}\ x \,.\, dx}{\text{Sin.}\ x^2} = -\,\frac{\text{Cos.}\ x}{\text{Sin.}\ x} \cdot \frac{1}{\text{Sin.}\ x} \,.\, dx$$

Daher

LXXXVIII. d Cosec. $x = -$ Cot. x . Cosec. x . dx

auch $= \frac{\text{Cosec. } x}{\text{tang. } x}$. dx

§. 133.

Die Bögen, deren zugehöriger Sinus, Tangente, Secante ꝛc. $= y$ seyn soll, lassen sich kurz so bezeichnen:

Arc. Sin. y; Arc. tang. y; Arc. Sec. y; etc.

Hiernach lassen sich die vorstehenden trigonometrischen Differentialien durch andere Bezeichnungen ausdrucken. Z. B. d Sin. $x =$ Cos. x . dx giebt d$x = \frac{\text{d Sin. } x}{\text{Cos. } x}$; wird nun der zum Bogen x gehörige Sinus durch y ausgedruckt, so hat man

Sin. $x = y$; Cos. $x = \sqrt{(1 - y^2)}$; d$x =$ d Arc. Sin. y;

also

LXXXIX. d Arc. Sin. $= \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$.

Ebenso, wenn man Cos. $x = y$, Sin. $x = \sqrt{(1 - y^2)}$ und d$x =$ d . Arc. Cos. y setzt (vorigen §. LXXXIII),

XC. d . Arc. Cos. $y = -\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$.

Ferner (vorigen §. LXXXV) wenn man tang. $x = y$, Sec. $x^2 = 1 + y^2$ und d$x =$ d Arc. tang. y setzt,

XCI. d Arc. tang. $y = \frac{dy}{1 + y^2}$

So auch (aus vor. §. LXXXVI), wenn man Cot. $x = y$, Cosec. $x^2 = 1 + y^2$ und d$x =$ d Arc. Cot. y setzt

XCII. d Arc. Cot. $y = -\frac{dy}{1 + y^2}$

Ferner (vor. §. LXXXVII) wenn man Sec. $x = y$, tang. $x = \sqrt{(y^2 - 1)}$ und $dx = d$ Arc. Sec. y ſetzt,

XCIII. $$d \text{ Arc. Sec. } y = \frac{dy}{y \cdot \sqrt{(y^2 - 1)}}$$

Endlich (vor. §. LXXXVIII) indem man Cosec. $x = y$, Cot. $x = \sqrt{(y^2 - 1)}$ und $dx = d$ Arc. Cosec. y ſetzt,

XCIV. $$d \text{ Arc. Cosec. } y = -\frac{dy}{y \cdot \sqrt{(y^2 - 1)}}$$

Anfänger müſſen ſich die 12 Formeln dieſes und des vorigen §. wohl zu eigen machen; ſie ſind für die Analyſis und deren Anwendung von größter Wichtigkeit.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Ableitung des binomischen Lehrsatzes.

§. 134.

Man soll $(a + b)^m$ durch eine Reihe ausdrucken.

Aufl. Man setze $(1 + x)^m =$

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots + Ox^{n-1} + Px^n + Qx^{n+1} + \ldots\ldots \quad (Z$$

$$= w$$

so erhält man

$$m . (1 + x)^{m-1} dx = dw \quad (N$$

also

$$m w dx = (1 + x) . dw$$

Daher

$$\frac{(1 + x) . dw}{dx} - mw = 0$$

Multiplicirt man nun den Werth von $\frac{dw}{dx}$, aus (Z) genommen, mit $1 + x$, so wird

$$\frac{(1+x).dw}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 .... + (n-1).Ox^{n-2} + nPx^{n-1} + (n+1)Qx^n ....$$
$$+ Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 ..... + (n-1)Ox^{n-1} + nPx^n ....$$

Ferner

$$mw = m + mAx + mBx^2 .... + mOx^{n-1} + mPx^n + mQx^{n+1} ....$$

Also

$$\frac{(1+x).dw}{dx} - mw =$$

$$\left.\begin{matrix} A+2B \\ -m+A \\ -mA \end{matrix}\right\}.x + \left.\begin{matrix} 3C \\ +2B \\ -mB \end{matrix}\right\}.x^2 + \left.\begin{matrix} 4D \\ +3C \\ -mC \end{matrix}\right\}.x^3 .... + \left.\begin{matrix} nP \\ +(n-1).O \\ -mO \end{matrix}\right\}.x^{n-1} + \left.\begin{matrix} (n+1).Q \\ +n.P \\ +mP \end{matrix}\right\}.x^n ....$$
$$= 0$$

Weil nun diese Gleichung für alle Werthe von x, also auch noch für $x = 0$ gelten muß, so hat man $A - m = 0$, also $A = m$; ebenso $2B + A - mA = 0$, also $B = \frac{(m-1).A}{2}$ $= \frac{m.(m-1)}{2}$, und nun $3C + 2B - mB = 0$, also $C = \frac{m-2}{3}.B =$ $\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}$ u. s. f. Ueberhaupt

$$(n+1).Q+(n-m).P=0$$

also

$$Q=\frac{(m-n).P}{n+1}$$

welches als allgemeines Glied der Reihe (Z) angesehen werden kann, woraus man ersieht, das aus dem Koëfficient P, welcher zur nten Potenz von x gehört, der Koëfficient Q, welcher zur $n+1$ten Potenz von x gehört, gebildet wird, indem man jenen mit $\frac{m-n}{n+1}$ multiplicirt. Demnach ist

$$C=\frac{m-3}{4}.B$$

$$D=\frac{m-4}{5}.C$$

u. s. f.

Es ist aber $(a+b)^m=\left(a.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^m$

$$=a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

Man erhält also, wenn man in (Z) $\frac{b}{a}$ statt x schreibt, und dann die ganze Reihe mit a^m multiplicirt,

$$(a+b)^m=a^m+a^m.m.\frac{b}{a}+a^m.\frac{m.(m-1)}{2}.\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$+a^m.\frac{m.(m-1).m-2)}{2.3}.\left(\frac{b}{a}\right)^3+\text{etc.}$$

$$=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m.(m-1)}{2}.a^{m-2}.b^2$$

$$+\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}.a^{m-3}.b^3+\text{etc.}$$

wo m jede ganze und gebrochene bejahte und verneinte Zahl bedeuten kann.

Anm. Wir verdanken diese schöne Darstellung des binomischen Lehrsatzes unserem verewigten Kästner. Seine Ableitung mittelst der Differentialrechnung benimmt der Darstellung nichts an ihrem Werthe, da die Differentialformen selbst aus ganz einfachen Operationen der Buchstabenrechnung so abgeleitet worden sind, daß wir noch früher, als wir den binomischen Lehrsatz im Iten Theile dieser Schrift vorgetragen haben, zu dieser Darstellung hätten schreiten können.

Drittes Kapitel.

Höhere und partielle Differentialien.

§. 135.

Wenn das Verhalten zwischen veränderlichen Größen x und y durch eine Gleichung vom ersten Grade bestimmt wird, so ist $\frac{dy}{dx}$ eine unveränderliche Größe. In diesem Falle ist nämlich der allgemeine Ausdruck für das Verhalten zwischen x und y

$$Ay + B = Ex + F$$

wo A, B, E und F unveränderliche Größen sind. Man hat also

$$Ady = Edx \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{E}{A}.$$

In allen übrigen Fällen ist $\frac{dy}{dx}$ eine veränderliche Größe.

§. 136.

Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ hat also als veränderliche Größe, die im Allgemeinen allemal durch (ϕx) ausgedruckt werden kann, in demselben Sinne wieder ein Differential, in welchem solches von jeder Funktion einer veränderlichen Größe statt hat. Es ist allemal $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d(\phi x)$, so daß

die Form des Differentials von der Form der Funktion (ϕx) abhängt. Den vorgetragenen Lehren zufolge läßt sich $d(\phi x)$ allemal durch $\mathfrak{X} . dx$ ausdrucken, so daß $\mathfrak{X}$ gleichfalls eine Funktion von x bezeichnet. Der Ausdruck $\frac{d(\phi x)}{dx}$ oder $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ läßt sich also wieder auf die Form $\frac{\mathfrak{X} . dx}{dx}$ bringen und giebt einen bestimmten Quotient $\mathfrak{X}$, der eine Funktion von x ist, wovon auch y eine Funktion seyn soll.

Will man die Form von $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ besonders ausdrucken, wie sie nämlich durch die Formen von x und y bestimmt wird, so darf man sich nur erinnern, daß $dy = (\phi x) . dx$, also dx die Einheit ist, durch welche dy ausgedruckt wird, und $\frac{dy}{dx}$ allemal $= (\phi x)$ bleibt, wie sich auch die Form von x ändern mag, so daß die Veränderlichkeit der Form von dx auf den Quotient $\frac{dy}{dx}$ d. h. auf den Ausdruck der allgemeinen Form dieses Quotienten gar keinen Einfluß hat. Man kann also hierbei die Form von dx als unveränderlich ansehen, und blos nach dy als einer veränderlichen Form differentiiren. So erhält man $d(dy) = dx . d(\phi x)$, und $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(dy)}{dx}$ $= \frac{dx . d(\phi x)}{dx} = d(\phi x)$. Setzt man also $\frac{dy}{dx} = \mathfrak{X}'$, so hat man bei ferneren ähnlichen Bezeichnungen mit $\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}'''$ ꝛc.

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{X}'$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ddy}{dx} = \frac{d\mathfrak{X}' . dx}{dx} = d\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}'' . dx$$

$$d\left(\frac{\left(\frac{ddy}{dx}\right)}{dx}\right) = \frac{dddy}{(dx)^2} = d\,\frac{\mathfrak{X}'' . dx}{dx} = \mathfrak{X}''' . dx$$

$$d\left(\frac{\left(\frac{dddy}{dx}\right)}{dx}\right) = \frac{ddddy}{(dx)^3} = \mathfrak{X}^{IV} . dx$$

u. s. f.

Setzt man d^2 statt dd, d^3 statt ddd u. s. f. (nicht als Potenzzeichen, sondern als Zeichen wiederholter Differentiirung), so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{X}' ; \quad \frac{d^2 y}{(dx)^2} = \mathfrak{X}''$$

$$\frac{d^3 y}{(dx)^3} = \mathfrak{X}''' ; \quad \frac{d^4 y}{(dx)^4} = \mathfrak{X}^{IV}$$

u. s. f.

Weil nun y eine Funktion von x seyn soll, die sich auch durch (fx) ausdrucken läßt, so lassen sich die vorstehenden Ausdrücke auch auf folgende Bezeichnungen bringen

$$\frac{d\,(fx)}{dx} = (f'x)$$

$$\frac{d\,(f'x)}{dx} = \frac{d^2\,(fx)}{(dx)^2} = (f''x)$$

$$\frac{d\,(f''x)}{dx} = \frac{d^3\,(fx)}{(dx)^3} = (f'''x)$$

wo (f'x) eine aus der Gleichung zwischen x und y abgeleitete Funktion ist, indem man (fx) statt y schreibt d. i. y durch x ausdruckt.

So ist (f''x) wieder eine zweite aus der (f'x), (f'''x) eine 3te aus der (f''x) u. s. f. abgeleitete Funktion. Diese letzteren Bezeichnungen sind von Lagrange (s. dessen Theo-

rie der Funktionen) von dem sie auch Lacroix in seiner Differentialrechnung beibehalten hat.

§. 137.

Der allgemeine Ausdruck für das Differential einer Funktion V von zweien veränderlichen Größen x und y ist

$$dV = A.dx + Bdy$$

wo A und B selbst von x oder y oder auch von beiden zugleich abhängen können. Dabei werden x und y im Allgemeinen als unabhängige Größen behandelt, wenn sie gleich in besonderen Fällen auch von einander abhängen. Der Ausdruck $A.dx + Bdy$ bezeichnet den Inbegriff aller Differenzialänderungen, welche der Funktion V zugehören, wenn von den veränderlichen Größen eine nach der andern als veränderlich behandelt wird. Ist z. B. $V = xy$, so hat man $dV = xdy + ydx$, und es ist $A = y$, $B = x$. Die Gleichung (LXXIV) giebt zwar gleichfalls $d(xy) = xdy + ydx$; dort waren aber x und y von einander abhängige Größen, welches für die Gleichung $dV = A.dx + B.dy$ nicht gefordert wird.

§. 138.

Es bezeichne nun $\left(\begin{smallmatrix} V \\ dx \end{smallmatrix}\right)$ dieselbe Funktion von x und y mit Inbegriff ihrer blos nach x genommenen Differentialänderung, und $\left(\begin{smallmatrix} V \\ dy \end{smallmatrix}\right)$ dieselbe Funktion mit Inbegriff ihrer blos nach y genommenen Differentialänderung, endlich $\left(\begin{smallmatrix} V \\ dx, y \end{smallmatrix}\right)$ dieselbe Funktion mit Inbegriff ihrer nach x und nach y genommenen Differentialänderung, so hätte man

1) $\left(\begin{smallmatrix} V \\ dx \end{smallmatrix}\right) = xy + ydx$

2) $\left(\begin{smallmatrix} V \\ dy \end{smallmatrix}\right) = xy + x\,dy$

3) $\left(\begin{smallmatrix} V \\ dx,y \end{smallmatrix}\right) = xy + y\,dx + x\,dy$

Dergleichen nur nach einzelnen veränderlichen Größen einer Funktion genommene Differentialien sind partielle Differentialien der Funktion. Schreibt man (No. 1.) $y + dy$ statt y, und (No. 2.) $x + dx$ statt x, so hat man

4) $xy + x\,dy + y\,dx$

5) $xy + y\,dx + x\,dy$

also No. 4 und 5 mit No. 3 ganz einerlei. Denn daß das Glied $dx.dy$ aus der Form des Differentials einer Funktion ganz wegfällt, weil $\frac{(\phi x)\,dx + dy\,dx}{dx}$ mit $\frac{(\phi x).dx}{dx}$ einerlei ist, weis man schon aus den vorgetragenen Lehren.

§. 139.

Ueberhaupt ist es allemal dasselbe, ob man in dem blos nach der Veränderlichkeit von x genommenen dV nachher $y + dy$ statt y, oder ob man in dem blos nach der Veränderlichkeit von y genommenen dV nachher $x + dx$ statt x schreibt, oder ob man gleich anfänglich dV in Bezug auf die Veränderlichkeit von x und von y zugleich nimmt.

Allgemein: Wenn man statt $\left(\begin{smallmatrix} dV \\ dx,y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} A\,dx \\ dx \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} B\,dy \\ dy \end{smallmatrix}\right)$ schlechtweg zuerst

I. $\left(\begin{smallmatrix} dV \\ dx \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} A.dx \\ dx \end{smallmatrix}\right)$, II. $\left(\begin{smallmatrix} dV \\ dy \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} B\,dy \\ dy \end{smallmatrix}\right)$

und nun in (I) $y + dy$ statt y, und in (II) $x + dx$ statt x setzt, so erhält man sowohl aus I als aus II die obige Gleichung für $\left(\begin{smallmatrix} dV \\ dx, y \end{smallmatrix}\right)$.

§. 140.

Nimmt man aufs Neue die Differentialänderung von $\left(\begin{smallmatrix} A \cdot dx \\ dx \end{smallmatrix}\right)$, blos nach der Veränderlichkeit von y, oder $d\left(\begin{smallmatrix} A\,dx \\ dx \end{smallmatrix}\right)$, und dann die Differentialänderung von $\left(\begin{smallmatrix} B\,dy \\ dy \end{smallmatrix}\right)$ blos nach der Veränderlichkeit von x, oder $d\left(\begin{smallmatrix} B\,dy \\ dy \end{smallmatrix}\right)$, so muß letztere mit ersterer einerlei seyn.

$\left(\begin{smallmatrix} dy \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} dx \end{smallmatrix}\right)$

Oder es ist

$$d\left(\begin{smallmatrix} A\,dx \\ dx \end{smallmatrix}\right) = d\left(\begin{smallmatrix} B\,dy \\ dy \end{smallmatrix}\right) \quad \left(\begin{smallmatrix} dy \end{smallmatrix}\right) \quad \left(\begin{smallmatrix} dx \end{smallmatrix}\right)$$

wofern

$$dV = \left(\begin{smallmatrix} A\,dx \\ dx \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} B\,dy \\ dy \end{smallmatrix}\right) \quad (\mathfrak{C}$$

seyn soll

Die erste Gleichung läßt sich auch so schreiben:

$$d\left(\begin{smallmatrix} dV \\ dx \end{smallmatrix}\right) = d\left(\begin{smallmatrix} dV \\ dy \end{smallmatrix}\right) \quad (\mathfrak{h}$$

$\left(\begin{smallmatrix} dy \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} dx \end{smallmatrix}\right)$

Dieser Satz sagt nur soviel:

Es ist einerlei, ob man, wenn V eine Funktion zweier veränderlicher Größen x und y ist, zuerst die

blos nach x differentiirte Funktion V nachher nur nach y differentiirt, oder ob man die zuerst blos nach y differentiirte V nachher blos nach x differentiirt.

§. 141.

Soll es also für einen Differentialausdruck von der Form

$$A \cdot dx + B \cdot dy$$

eine Funktion V geben, deren Differential er wäre, und enthalten A und B außer beständigen Größen keine andere veränderliche als die x und y, so muß

$$d\left(\begin{matrix} A\,dx \\ dy \end{matrix}\right) = d\left(\begin{matrix} B\,dy \\ dx \end{matrix}\right)$$

seyn. Es ist aber

$$d\left(\begin{matrix} A\,dx \\ dy \end{matrix}\right) = dA \cdot dx; \text{ (A nach y differentiirt)} \qquad (\odot)$$

$$d\left(\begin{matrix} B\,dy \\ dx \end{matrix}\right) = dB \cdot dy; \text{ (B nach x differentiirt)}$$

also, die Differentiirungen von A und von B auf verstehende Weise verstanden,

$$dA \cdot dx = dB \cdot dy$$

oder

$$\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$$

wo dy, dx Divisoren sind, die Parenthesen aber die vorher (⊙) angegebene Art der Differentiirungen bezeichnen, daß nämlich A nur nach der im Divisor enthaltenen veränderlichen Größe y, und so auch B nur nach der im Divisor enthaltenen veränderlichen Größe x differentiirt seyn soll. Dabei wird kein bestimmtes Verhalten zwischen x und y vorausgesetzt, ob sie gleich auch von einander abhängen können.

Ex. Es sey der Differentialausdruck

$$x\,y\,dx + x^2\,dy$$

gegeben, wo $xy = A$, $x^2 = B$ ist, so findet man

$$\left(\frac{dA}{dy}\right) \text{ nicht} = \left(\frac{dB}{dx}\right)$$

Es giebt also keine allgemeine Funktion von x und y (ohne bestimmtes Verhalten zwischen x und y), deren Differential $x\,y\,dx + x^2\,dy$ seyn könnte.

Wohl aber kann für bestimmtes Verhalten zwischen x und y eine solche Funktion statt finden. Ist z. B. $y = ax^2$, so hat man $ax^3\,dx + 2ax^3\,dx$ oder $3ax^3\,dx$, und nun wird $V = 3a.\,\frac{1}{4}x^4$, denn es ist $d\,(3a.\,\frac{1}{4}x^4) = 3a.\,\frac{1}{4}.\,4x^3\,dx = 3ax^3\,dx$.

§. 142.

In der Gleichung

$$dV = A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

ist V eine Funktion dreier veränderlichen Größen, x, y, z, auf deren gegenseitiges Verhalten hier nicht gesehen wird. Es sey nun

$$A\,dx = \left(\frac{dV}{dx}\right);\quad B\,dy = \left(\frac{dV}{dy}\right);\quad C\,dz = \left(\frac{dV}{dz}\right);$$

so ist

$$d\left(\frac{dV}{dx}\right) = d\left(\frac{dV}{dy}\right)$$

$$dy \qquad\qquad dx$$

$$d\left(\frac{dV}{dz}\right) = d\left(\frac{dV}{dx}\right)$$

$$dx \qquad\qquad dz$$

$$d\left(\frac{dV}{dy}\right) = d\left(\frac{dV}{dz}\right)$$

$$dz \qquad\qquad dy$$

Dieſe Sätze laſſen ſich nun wieder ſo ausdrucken:

$$d\left(\frac{A\,dx}{dy}\right) = d\left(\frac{B\,dy}{dx}\right)$$

$$d\left(\frac{C\,dz}{dx}\right) = d\left(\frac{A\,dx}{dz}\right)$$

$$d\left(\frac{B\,dy}{dz}\right) = d\left(\frac{C\,dz}{dy}\right)$$

oder

$$dA\,.\,dx = dB\,.\,dy \left(\begin{matrix}\text{A nach y, und B}\\ \text{nach x differentiirt}\end{matrix}\right)$$

$$dC\,.\,dz = dA\,.\,dx \left(\begin{matrix}\text{C nach x und A}\\ \text{nach z differentiirt}\end{matrix}\right)$$

$$dB\,.\,dy = dC\,.\,dz \left(\begin{matrix}\text{B nach z und C}\\ \text{nach y differentiirt}\end{matrix}\right)$$

alſo

$$1)\ \left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$$

$$2)\ \left(\frac{dC}{dx}\right) = \left(\frac{dA}{dz}\right)$$

$$3)\ \left(\frac{dB}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dy}\right)$$

wo die Parentheſen (No. 1 — 3.) nur anzeigen, daß die in den Diviſoren vorkommenden veränderlichen Größen zugleich diejenigen ſind, nach welchen der Zähler oder Dividend jedesmal differentiirt ſeyn ſoll.

§. 143.

Hätte man

$$dV = A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du$$

so müßte, wofern es eine Funktion V geben sollte, deren Differential der gegebene polynomische Differentialausdruck wäre,

$$\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right); \left(\frac{dA}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dA}{du}\right) = \left(\frac{dD}{dx}\right); \left(\frac{dB}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{dB}{du}\right) = \left(\frac{dD}{dy}\right); \left(\frac{dC}{du}\right) = \left(\frac{dD}{dz}\right)$$

seyn. Für einen 5 theiligen Differentialausdruck mit 5 veränderlichen Größen hätte man 10 dergleichen partielle Differentialgleichungen u. s. f.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf Umformung der Gleichungen und Entwickelung in Reihen.

§. 144.

Es sey

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Man soll aus dieser Gleichung eine andere machen, die nach Potenzen von $x - k$ geordnet ist, so daß x dieselben Werthe wie in der ursprünglichen Gleichung behält.

Aufl. Die neue Gleichung muß nothwendig andere Koëfficienten erhalten; sie läßt sich daher so ausdrucken:

$$(x-k)^4 + \beta(x-k)^3 + \gamma.(x-k)^2 + \delta.(x-k) + \varepsilon = 0$$

Entwickelt man die einzelnen Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze, so erhält man

$$\left.\begin{array}{rl} (x-k)^4 = & x^4 - 4kx^3 + 6k^2x^2 - 4k^3x + k^4 \\ +\beta(x-k)^3 = & \quad + \beta x^3 - 3k\beta x^2 + 3k^2\beta x + \beta k^3 \\ +\gamma(x-k)^2 = & \quad\quad + \gamma x^2 - 2\gamma k x + \gamma k^2 \\ +\delta(x-k) = & \quad\quad\quad + \delta x - \delta k \\ +\varepsilon = & \quad\quad\quad\quad + \varepsilon \end{array}\right\} = 0$$

Weil nun x in der neuen Gleichung dieselben Werthe haben soll, wie in der ursprünglichen, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \beta - 4k &= b \\ 6k^2 - 3k\beta + \gamma &= c \\ -4k^3 + 3k^2\beta - 2\gamma k + \delta &= d \\ k^4 - \beta k^3 + \gamma k^2 - \delta k + \varepsilon &= e \end{aligned}\right\} (\odot$$

Daher

$$\left.\begin{aligned} \beta &= b + 4k \\ \gamma &= c + 3kb + 6k^2 \\ \delta &= d + 4k^3 + 3k^2 b + 2kc \\ \varepsilon &= e + k^4 + bk^3 + ck^2 + dk \end{aligned}\right\} (\mathbb{C}$$

Die Werthe in (ℂ) ergeben sich aus (⊙), wenn man statt β, γ, δ ihre gefundenen Werthe jedesmal in der nachfolgenden Gleichung substituirt. Hiernach wird also

$\varepsilon =$ der gegebenen biquadratischen Größe in der vorgegebenen Gleichung, nur k statt x gesetzt.

$$\delta = \frac{d\varepsilon}{1.\,dk} \left(\begin{array}{l}\text{nämlich das Differential von } \varepsilon \text{ dividirt} \\ \text{mit dem Differential von k}\end{array}\right)$$

$$\gamma = \frac{d\delta}{2\,dk}; \quad \beta = \frac{d\gamma}{3.\,dk};$$

wo alles nur in Bezug auf k differentiirt wird. Oder auch

$$\delta = \frac{d\varepsilon}{1.\,dk}; \quad \gamma = \frac{dd\varepsilon}{1.2.(dk)^2}; \quad \beta = \frac{ddd\varepsilon}{1.2.3.(dk)^3};$$

§. 145.

Auf dieselbe Weise läßt sich aus jeder Gleichung vom mten Grade, wie

$$x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots\ldots + px + r = 0$$

eine nach Potenzen von k geordnete machen.

Wird nämlich das hier gegebene Polynom, welches $= 0$ seyn soll, allgemein mit Æ bezeichnet, und die Koëfficienten der umgeformten Gleichung, vom Ende rückwärts

genommen, durch ι', ι'', ι''', ι^{IV} .... ausgedruckt, so hat man

$\iota = x$ nur k statt x geschrieben.

$$\iota' = \frac{dx}{dk}; \quad \iota'' = \frac{d\iota}{2 . dk}; \quad \iota^{IV} = \frac{d\iota''}{3 . dk} \text{ etc.}$$

Die neue Gleichung wäre

$$\iota + \iota' (x - k) + \iota'' (x - k)^2 + \iota^{IV} (x - k)^3 \ldots + (x - k)^m = 0$$

und nun

$$\iota = k^m + bk^{m-1} + ck^{m-2} \ldots + px + r$$

$$\iota' = \frac{d\iota}{dk} = mk^{m-1} + b(m-1)k^{m-2} \ldots + p$$

$$\iota'' = \frac{d\iota'}{2 . dk} = \frac{2}{m . (m-1)} k^{m-2} + \frac{b(m-1).(m-2)}{2} k^{m-3} \ldots + \text{etc.}$$

$$\iota^{IV} = \frac{d\iota''}{3 . dk} = \frac{m . (m-1) . (m-2)}{2 . 3} . k^{m-3} + \frac{b . (m-1) . (m-2) . (m-3)}{2 . 3} k^{m-4} + \text{etc.}$$

§. 146.

Der sehr einfache Satz, daß nämlich aus einer Gleichung, wie

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

eine andere

$$(x - k)^4 + \beta (x - k)^3 + \gamma (x - k)^2 + \delta (x - k) + \iota = 0$$

abgeleitet werde, indem man

$$\iota = k^4 + bk^3 + ck^2 + dk + e$$

$$\delta = \frac{ds}{dk}; \quad \gamma = \frac{d\delta}{2\,dk} \text{ und } \varepsilon = \frac{d\gamma}{3 \cdot dk}$$

setzt, und dabei alles nach k differentiirt, ergab sich mir durch eine bloße Induktion auf dem Wege §. 144, noch ehe ich vom Taylorschen Lehrsatze (§. 149.) etwas wußte.

Allgemein wie §. 105 ausgedruckt heißt er so:

Aus der Gleichung

1) $x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + px + r = 0$

wird, indem man

$$k^m + bk^{m-1} + ck^{m-2} \ldots + pk + r = \mathfrak{X}'$$

setzt,

$$2)\ \mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{dk}(x-k) + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2 \cdot (dk)^2} \cdot (x-k)^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2 \cdot 3 \cdot (dk)} \cdot (x-k)^3 \ldots + (x-k)^m = 0$$

die mit der

$$\rho + \pi \cdot (x-k) + \sigma \cdot (x-k)^2 + \tau \cdot (x-k)^3 + \mu(x-k)^4 \ldots + \gamma(x-k)^{m-2} + \beta \cdot (x-k)^{m-1} + (x-k(^m = 0$$

einerlei ist, wenn man

$$\rho = \mathfrak{X}'; \quad \pi = \frac{d\rho}{dk}; \quad \sigma = \frac{d\pi}{2 \cdot dk},$$

$$\tau = \frac{d\sigma}{3 \cdot dk} \text{ etc.} \quad \text{setzt.}$$

§. 147.

Man könnte auch

3) $x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + px + r = \mathfrak{X}$

4) $k^m + bk^{m-1} + ck^{m-2} \ldots + pk + r = \mathfrak{X}'$

setzen; dann wäre

$$5)\ \mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{dk}\cdot(x-k) + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2\cdot(dk)^2}\cdot(x-k)^2 \ldots\ldots = \mathfrak{X}$$

Da man statt k jede Größe setzen kann, so kann man dafür auch x — k in (No. 4.) schreiben; dieses giebt

$$6)\ (x-k)^m + b\,(x-k)^{m-1} + c\,(x-k)^{m-2} \ldots\ldots + p\,(x-k) + r = \mathfrak{X}'$$

und aus (No. 5.) würde jetzt, weil x — (x — k) oder k statt x — k stehen müßte,

$$\mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{d(x-k)}\cdot k + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2\cdot(d(x-k))^2}\cdot k^2 + \text{etc.} = \mathfrak{X}$$

oder, indem man nach x differentiirt, also dx statt d (x — k) setzt,

$$7)\ \mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{dx}\cdot k + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2\cdot(dx)^2}\cdot k^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2\cdot3\cdot(dx)^3}\cdot k^3 \ldots\ldots + \text{etc.} = \mathfrak{X}$$

(= dem $\mathfrak{X}$ in No. 3.)

Demnach wird aus einer Funktion $\mathfrak{X}'$ von der Form (No. 6.)

$$(x-k)^m + b\,(x-k)^{m-1} \ldots\ldots p\,(x-k) + r$$

eine andere $\mathfrak{X}$ von der Form (No. 3.)

$$x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots\ldots + px + r$$

wenn man (dort No. 3. zur Rechten)

$$\mathfrak{X} + \frac{d\mathfrak{X}'}{dx}\cdot k + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2\cdot(dx)^2}\cdot k^2 \ldots\ldots + \text{etc.}$$

statt $\mathfrak{X}$ schreibt.

§. 148.

Wie aus der Form

$$(x-k)^m + b\,(x-k)^{m-1} \ldots\ldots + p\,(x-k) + r \text{ (No. 6.)}$$

die

$$x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots\ldots + px + r \text{ (No. 3.)}$$

wird, so wird auch, indem in beiden Ausdrücken nur $x + k$ statt x geschrieben wird, aus der Form

A) $x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + px + r$

die

B) $(x + k)^m + b(x -)^{m-1} \ldots + p(x + k) + r$

Man darf nur die (A) an die Stelle von No. 6. und die (B) an die Stelle von B schreiben. Setzt man also jetzt

8) $x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + px + r = \mathfrak{X}'$

9) $(x + k)^m + b(x + k)^{m-1} \ldots + p(x + k) + r = \mathfrak{X}$

so wird aus No. 8. die No. 9., wenn man in No. 9.

$$\mathfrak{X} + \frac{d\mathfrak{X}'}{dx} \cdot k + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2 \cdot (dx)^2} \cdot k^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}}{2 \cdot 3 \cdot (dx)^3} + \text{etc.}$$

statt $\mathfrak{X}$ schreibt.

Wenn also $\mathfrak{X}'$ irgend eine Funktion von x ist, und $\mathfrak{X}$ den Ausdruck bezeichnet, in welchen sich der $\mathfrak{X}'$ verwandelt, wenn $x + k$ statt x gesetzt wird, so hat man

$$10) \; \mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{dx} \cdot k + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2 \cdot (dx)^2} \cdot k^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2 \cdot 3 \cdot (dx)^3} \cdot k^3 + \text{etc.} = \mathfrak{X}$$

Ebenso wird aus der Funktion (No. 8.), nur $-k$ statt $+k$ geschrieben, eine andere

$$(x - k)^m + b(x - k)^{m-1} + c(x - k)^{m-2} \ldots + p(x - k) + r = \mathfrak{X}.$$

wenn man

$$\mathfrak{X}' - \frac{d\mathfrak{X}'}{dx} \cdot k + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2(dx)^2} \cdot k^2 - \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2 \cdot 3 \cdot (dx)^3} \cdot k^3 + \text{etc.}$$

statt $\mathfrak{X}'$ (No. 8.) schreibt.

Die Gleichung

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}' - \frac{d\mathfrak{X}'}{dx} \cdot k + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2(dx)^2} \cdot k^2 - \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2 \cdot 3(dx)^3} \cdot k + \text{etc.}$$

läßt sich auch so ausdrucken:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{X}' - \frac{dy'}{dx}.k + \frac{dy''}{2.dx}.k - \frac{dy'''}{3.dx}.k + \text{etc.}$$

wenn nämlich y' das vorhergehende Glied $\mathfrak{X}'$, y'' das vorhergehende $\frac{dy'}{dx}.k$ u. s. f. bezeichnet.

Ex. zu No. 10. Es sey

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \mathfrak{X}'$$

so wird

$$\begin{cases} (x+k)^4 = x^4 + 4kx^3 + 6k^2x^2 + 4k^3x + k^4 \\ b.(x+k)^3 = bx^3 + 3kbx^2 + 3k^2bx + bk^3 \\ c.(x+k)^2 = cx^2 + 2ckx + ck^2 \\ d.(x+k) = dx + dk \\ e = e \end{cases}$$

Die Addition der lothrechten Kolonnen zu beiden Seiten giebt

$$\left.\begin{matrix} (x+k)^4 \\ +b\,(x+k)^3 \\ +c\,(x+k)^2 \\ +d\,(x+k) \\ +e \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{dx}.k \\ + \frac{d^2\mathfrak{X}}{2(dx)^2}k^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2.3.(dx)^3}.k^3 \\ + \frac{d^4\mathfrak{X}'}{2.3.4.(dx)^4}.k^4 \end{cases}$$

Nämlich zur Rechten

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \mathfrak{X}'$$

$$4kx^3 + 3kbx^2 + 2ckx + dk = \frac{d\mathfrak{X}'}{dx}.k$$

$$6k^2x^2 + 3k^2bx + ck^2 = \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2(dx)^2}.k^2$$

$$= \frac{d\left(\frac{d\mathfrak{X}'}{dx}.k\right)}{2dx}.k$$

$$4k^3 + bk^3 \ldots\ldots = \frac{d^3 \mathfrak{X}'}{2 \cdot 3 \cdot (dx)^3} \cdot k^3$$

$$= \frac{d\left(\frac{d^2 \mathfrak{X}'}{2\,(dx)^2} \cdot k^2\right)}{3\,dx} \cdot k$$

$$k4 \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{d^4 \mathfrak{X}'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (dx)^4} \cdot k^4$$

$$= \frac{d\left(\frac{d^3 \mathfrak{X}'}{2 \cdot 3 \cdot (dx)^3} \cdot k^3\right)}{4\,dx} \cdot k$$

§. 149.

Schreibt man $(f\,(x + k))$ statt $\mathfrak{X}$, und (fx) statt $\mathfrak{X}'$, so hat man

$$(f\,(x + k)) = (fx) + \frac{d\,(fx)}{dx} \cdot k + \frac{d^2\,(fx)}{2 \cdot (dx)^2} \cdot k^2 + \frac{d^3\,(fx)}{2 \cdot 3\,(dx)^3} \cdot k^3 + \text{etc.}$$

welches der Taylorsche Lehrsatz ist, der sich also nach der vorhin angegebenen Bedeutung von y', y'' etc. auch so ausdrucken läßt:

$$(f\,(x + k)) =$$

$$(fx) + \frac{dy'}{dx} \cdot k + \frac{dy''}{2 \cdot dx} \cdot k + \frac{dy'''}{3 \cdot dx} \cdot k + \text{etc.}$$

§. 150.

Man ist hier blos durch eine Induktion auf diesen Lehrsatz gekommen. Seine Allgemeinheit läßt sich aber sehr leicht beweisen. Es sey nämlich

$$(x + k)^m + A\,(x + k)^{m-1} + B\,(x + k)^{m-2} \ldots\ldots + Q \cdot (x + k) + R = 0$$

und

1) $x^m + A . x^{m-1} + B . x^{m-2} \ldots + Qx + R = \mathfrak{X}$

so ist

2) $\frac{d\mathfrak{X}}{dx} . k = m x^{m-1} k + A . (m-1) x^{m-2} k$

$+ B . (m-2) . x^{m-3} . k + \ldots + Qx$

3) $\frac{1}{2} k . \frac{d\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} . k\right)}{dx} = \frac{d^2\mathfrak{X}}{2 . (dx)^2} . k^2$

$= \frac{m . (m-1)}{2} x^{m-2} k^2 + \frac{A (m-1) . (m-2)}{2} x^{m-3} k^2$

$+$ etc.

4) $\frac{1}{3} k . \frac{d\left(\frac{d^2\mathfrak{X}}{2 (dx)^2} . k^2\right)}{dx} = \frac{d^3\mathfrak{X}}{2 . 3 . (dx)^3} . k^3$

$= \frac{m(m-1) . (m-2)}{2 . 3} x^{m-3} k^3 + \frac{A(m-1) . (m-2)(m-3)}{2 . 3} x^{m-4}$

$+$ etc.

u. s. f.

Hier bilden in den nach einander folgenden Reihen No. 1, 2, 3 und 4

die ersten Glieder den Werth von $(x + k)^m$

— zweiten — — — — $A (x + k)^{m-1}$

— dritten — — — — $B (x + k)^{m-2}$

u. s. f.

Daher

$$\mathfrak{X} + \frac{d\mathfrak{X}}{dx} . k + \frac{d^2\mathfrak{X}}{2 . (dx)^2} . k^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}}{2 . 3 . (dx)^3} . k^3 + \text{etc.}$$

$$= (x + k)^m + A . (x + k)^{m-1} + B (x + k)^{m-2}$$

$$\ldots + Q (x + k) + R$$

Oder, wenn der Ausdruck

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Qx + R$$

durch (fx), und die Funktion, welche aus der (fx) wird, wenn man x + k statt x setzt, durch (f (x + k)) ausgedruckt wird, so hat man allgemein

$$(f(x+k)) = (fx) + \frac{d(fx)}{dx} \cdot k + \frac{d^2(fx)}{2.(dx)^2} \cdot k^2 + \frac{d^3(fx)}{2.3.(dx)^3} \cdot k^3 + \text{etc.}$$

welches der obige Lehrsatz ist.

§. 151.

Druckt man nun die Werthe von (fx), $\frac{d(fx)}{dx}$, $\frac{d^2(fx)}{(dx)^2}$ etc. allgemein aus, und setzt darin in den so herauskommenden allgemeinen Ausdrücken $x = 0$, so verwandlen sich solche in bestimmte Werthe, die wir durch Y, Y', Y''... ausdrucken können. Dann wird also

$$(fk) = Y + \frac{Y'k}{1} + \frac{Y''k}{1.2} + \frac{Y'''k}{1.2.3} + \frac{Y^{IV}k}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von k gelten muß, wenn nur Y, Y', Y''.... diejenigen Werthe von (fx), $\frac{d(fx)}{dx}$, $\frac{d^2(fx)}{(dx)^2}$.... bezeichnen, welche für $x = 0$ statt finden, so muß sie auch für jeden möglichen Werth von x gelten; man hat also auch

11) $(fx) = Y + Y' \cdot \frac{x}{1} + Y'' \cdot \frac{x^2}{1.2} + Y''' \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$

Dabei ist Y derjenige Werth, welcher aus (fx) wird, wenn man $x = 0$ setzt, und nun

$$Y' = \frac{dY}{dx}$$

$$Y'' = \frac{dY'}{dx}$$

$$Y''' = \frac{dY''}{dx}$$

u. s. f.

§. 152.

Die Gleichung (§. 146. No. 2.) führt auch auf die schon oben vorgetragene Näherungsmethode zur Erfindung der Wurzeln höherer Gleichungen. Ist nämlich k eine Größe, die der Wurzel x schon so nahe kommt, daß $(x - k)^2$ in Vergleichung mit $x - k$ sehr unbedeutend wird, so hat man beinahe

$$\mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{dx} \cdot (x - k) = 0$$

oder, wenn man $x - k = \mu$ setzt,

$$\mathfrak{X}' + \frac{d\mathfrak{X}'}{dx} \cdot \mu = 0$$

also

$$\mu = - \frac{\mathfrak{X}' dk}{d\mathfrak{X}'}$$

und

$$x = k + \mu = k - \frac{\mathfrak{X}' dk}{d\mathfrak{X}'} = \frac{k d\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}' dk}{d\mathfrak{X}'}$$

Wenn also

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} \ldots + p x + r = 0$$

und k eine Zahl ist, die einem Werthe von x schon sehr nahe kommt, so ist noch genauer

$$x = k - \frac{\mathfrak{X}' dk}{d\mathfrak{X}'}$$

Bezeichnet man diesen Werth von x mit k', und setzt jetzt

$$k'^m + ak'^{m-1} + bk'^{m-2} \ldots + pk' + r = X'$$

so hat man aufs Neue noch genauer

$$x = k' - \frac{X'\,dk'}{dX'} = \frac{k'\,dX' - X'\,dk'}{dX'}$$

Dieses Verfahren, welches so oft man will wiederholt werden kann, giebt dasselbe, was uns die oben schon angegebene Newtonsche Methode giebt (§. 77.). Dort hätte man für die Anwendung auf die biquadratische Gleichung

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

$$\mu = -\frac{m^4 + \alpha m^3 + \beta m^2 + \gamma m + \delta}{4m^3 + 3\alpha m^2 + 2\beta m + \gamma} \quad (\text{h})$$

wo nur m statt k steht. Hier ist

$$X' = m^4 + \alpha m^3 + \beta m^2 + \gamma m + \delta$$

und

$$\mu = -\frac{X'\,dm}{dX'}$$

$$= -\frac{(m^4 + \alpha m^3 + \beta m^2 + \gamma m + \delta).\,dm}{(4m^3 + 3\alpha m^2 + 2\beta m + \gamma).\,dm}$$

welches mit (h) einerlei ist.

§. 153.

Auch dient dieselbe Gleichung (§. 146. No. 2.), eine Gleichung

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} \ldots + \pi x + \rho = 0$$

auf den nächstniedrigeren Grad m — 1 zu bringen, wenn schon eine Wurzel der Gleichung bekannt ist. Es sey nämlich k eine bekannte Wurzel, also

$$k^m + \alpha k^{m-1} + \beta k^{m-2} + \gamma k^{m-3} \ldots\ldots$$
$$+ \pi k + \rho = X'$$

so ist im jetzigen Falle $\mathfrak{X}' = 0$, und daher schlechthin (§. 146. No. 2.)

$$\frac{d\mathfrak{X}'}{dx}(x-k) + \frac{d^2\mathfrak{X}}{2(dk)^2}\cdot(x-k)^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2.3.(dk)^3}\cdot(x-k)^3$$
$$\ldots\ldots + (x-k)^m = 0$$

Schreibt man y statt $x - k$, und dividirt durchaus mit y, so wird

$$\frac{d\mathfrak{X}'}{dk} + \frac{d^2\mathfrak{X}'}{2(dk)^2}\cdot y + \frac{d^3\mathfrak{X}'}{2.3.(dk)^3}\cdot y^2 + \frac{d^4\mathfrak{X}'}{2.3.4.(dk)^4}\cdot y^3$$
$$\ldots\ldots + y^{m-1} = 0.$$

Ex. Es sey

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

und k eine Wurzel dieser Gleichung, also

$$k^3 + \alpha k^2 + \beta k + \gamma = \mathfrak{X}'$$

und

$$\frac{d\mathfrak{X}'}{dk} = 3k^2 + 2\alpha k + \beta$$

Daher

$$\frac{d^2\mathfrak{X}'}{2.(dk)^2}\cdot y = \tfrac{1}{2}y\cdot\frac{d(3k^2 + 2\alpha k + \beta)}{dk}$$
$$= 3ky + \alpha y$$

$$\frac{d^3\mathfrak{X}'}{2.3.(dk)^3}\cdot y = \tfrac{1}{3}y\cdot\frac{d(3ky + \alpha y)}{dk} = y^2$$

Folglich

$$\left.\begin{matrix} 3k^2 + 2\alpha k + \beta \\ + 3yk + \alpha y \\ + y^2 \end{matrix}\right\} = 0$$

oder

$$y^2 + (\alpha + 3k)\cdot y + 3k^2 + 2\alpha k + \beta = 0$$

Substituirt man $x - k$ statt y, so wird

$$x^2 + (\alpha + k)\cdot x + k^2 + \alpha k + \beta = 0 \;(\!(\!($$

Es ist aber vermöge der obigen kubischen Gleichung

$$k^3 + \alpha k^2 + \beta k + \gamma = 0$$

die Summe

$$k^2 + \alpha k + \beta = -\frac{\gamma}{k}$$

folglich aus (C)

$$x^2 + (\alpha + k) . x - \frac{\gamma}{k} = 0$$

und nun

$$x = -\frac{\alpha + k}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\alpha + k}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{k}\right)}$$

welches die beiden anderen Werthe von x sind.

Ohne die Beihülfe der Differentialrechnung fanden wir im I. Th. dieser Schrift dasselbe (§. 55. u. 70).

§. 154.

Zur Anwendung der allgemeinen Formel (§. 151. No. 11.) mag uns die wichtige Entwickelung des Exponentialausdrucks a^x dienen. Man setze

$$(f x) = \mathfrak{X} + \frac{d\mathfrak{X}}{dx} . x + \frac{d^2\mathfrak{X}}{2.(dx)^2} . x^2 + \frac{d^3\mathfrak{X}}{2.3(dx)^3} . x^3 + \text{etc.}$$

und nehme nun zuerst $\mathfrak{X} = a^x$, so wird

$$\text{logn. } \mathfrak{X} = x . \text{logn. } a ; \; d \text{ logn. } \mathfrak{X} = \text{ln. } a . dx$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{X}}{\mathfrak{X}} = \text{logn. } a . dx$$

also

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} = \mathfrak{X} . \text{logn. } a = a^x \text{ logn. } a$$

Ferner

$$\frac{d^2 \mathfrak{X}}{(dx)^2} = \frac{d\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\,(\mathfrak{X}.\ \text{logn. a})}{dx}$$

$$= \frac{(\text{logn. a}).\ d\mathfrak{X}}{dx}$$

also

$$\frac{d^2 \mathfrak{X}}{(dx)^2} = \text{logn. a}.\ a^x\ \text{logn. a} = a^x.(\text{logn. a})^2$$

$$\frac{d^3 \mathfrak{X}}{(dx)^2} = \frac{d\left(\frac{d^2\mathfrak{X}}{(dx)^2}\right)}{dx} = \frac{d\ a^x.\ (\text{In. a})^2}{dx}$$

$$= \frac{(\text{ln. a})^2.\ d\mathfrak{X}}{dx}$$

$$= (\text{ln. a})^2.\ a^x.\ \text{ln. a} = (\text{ln. a})^3.\ a^x$$

Ebenso

$$\frac{d^4 \mathfrak{X}}{dx} = (\text{logn. a})^4.\ a^x$$

u. s. f.

Aber die obige nach $\mathfrak{X}$ geordnete Gleichung setzt voraus, daß man in diesen gefundenen Werthen nunmehr $x = 0$ setze, und hierdurch die Werthe Y, Y′ etc. bestimme. Weil nun, $x = 0$ gesetzt, $a^x = a^0 = 1$ wird, so erhält man

$$Y = a^0 = 1$$
$$Y' = a^0.\ \text{logn. a} = \text{logn. a}$$
$$Y'' = a^0.\ (\text{logn. a})^2 = (\text{logn. a})^2$$
$$Y''' = a^0.\ (\text{logn. a})^3 = (\text{logn. a})^3$$

u. s. f.

also

$$(fx) \text{ oder } a^x = 1 + \frac{\text{logn. a}}{1}.\ x + \frac{(\text{logn. a})^2}{1.2}.\ x^2 + \frac{(\text{logn. a})^3}{1.2.3}.\ x^3 + \text{etc.}$$

wie §. 100. LXIII.

§. 155.

Eine andere nützliche Anwendung der Formel am Anfang des vorigen §. wäre die Entwickelung von Sin. x und Cos. x durch den Bogen x, die Größe von Bogen x für den Halbmesser $= 1$ verstanden.

Wir wollen zuerst Sin. x für (fx) nehmen, so hat man, anfänglich $X = \text{Sin. } x$ gesetzt, für $x = 0$

$$1)\ Y = \text{Sin. } 0° = 0$$

Ferner zuerst allgemein

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d\,\text{Sin. } x}{dx} = \frac{\text{Cos. } x \,.\, dx}{dx} = \text{Cos. } x \quad \text{(LXXXIV)}$$

also, für $x = 0$,

$$2)\ Y' = \text{Cos. } 0° = 1$$

Ebenso

$$\frac{d^2X}{(dx)^2} = \frac{d\left(\frac{dX}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\,\text{Cos. } x}{dx} = -\,\text{Sin. } x$$

daher, für $x = 0$,

$$3)\ Y'' = -\,\text{Sin. } 0° = 0$$

Nunmehr

$$\frac{d^3X}{(dx)^3} = \frac{d\left(\frac{d^2X}{(dx)^2}\right)}{dx} = -\,\frac{d\,\text{Sin. } x}{dx} = -\,\text{Cos. } x$$

also, für $x = 0$,

$$4)\ Y''' = -\,\text{Cos. } 0° = -\,1$$

Jetzt

$$\frac{d^4X}{(dx)^4} = \frac{d\left(\frac{d^3X}{(dx)^3}\right)}{dx} = -\,\frac{d\,\text{Cos. } x}{dx} = \text{Sin. } x$$

Demnach, für $x = 0$,

$$5)\ Y^{IV} = \text{Sin. } 0° = 0$$

So auch

$$\frac{d^5 X}{(dx)^5} = \frac{d\left(\frac{d^4 X}{(dx)^4}\right)}{dx} = \frac{d\,\text{Sin. } x}{dx} = \text{Cos. } x$$

folglich, für $x = 0$,

$$6)\quad Y^5 = \text{Cos. } 0° = 1$$

u. s. f.

So fallen also Y und alle Glieder, welche Y mit einer geraden Anzahl von Strichen enthalten, weg, und die übrigen wechseln mit + und — ab. Man hat also

$$\text{Sin. } x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Für einen Winkel von 20° oder $\frac{1}{9}$ der halben Peripherie ist der zugehörige Bogen oder $x = \frac{3,14159}{9} = 0,74533$; für einen Winkel von 10° ist $x = 0,37366$; daher, für einen Winkel von 10°, $\frac{x^5}{1.2.3.4.5} = \frac{(0,373...)^5}{120}$, welches schon eine sehr kleine Größe ist.

Man kann daher, wenn nicht gerade von astronomischen Bestimmungen die Rede ist, ohne merklichen Fehler für Winkel, die nicht über 10° betragen, schlechthin

$$\text{Sin. } x = x - \frac{x^3}{1.2.3}$$

setzen.

Eben diese Näherungsgleichung kann bei den allermeisten praktischen Fragen noch bis zu Winkeln von 20° beibehalten werden, weil für solche fast immer auch noch $\frac{(0,745...)^5}{120}$ als unbedeutend bei Seite gesetzt werden kann.

§. 156.

Auf gleiche Weise dient dieselbe Formel zur Entwickelung von Cos. x. Setzt man anfänglich $\mathfrak{X} = \text{Cos. } x$, so hat man, für $x = 0$,

$$1)\ Y = \text{Cos. } 0^\circ = 1$$

Ferner

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} = \frac{d\ \text{Cos. } x}{dx} = -\ \text{Sin. } x \quad \text{(LXXXIII)}$$

also, für $x = 0$,

$$2)\ Y = -\ \text{Sin. } 0^\circ = 0$$

$$\frac{d^2\mathfrak{X}}{(dx)^2} = \frac{d\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}\right)}{dx} = -\ \frac{d\ \text{Sin. } x}{dx} = -\ \text{Cos. } x$$

Daher, für $x = 0$,

$$3)\ Y'' = -\ \text{Cos. } 0^\circ = -\ 1$$

$$\frac{d^3\mathfrak{X}}{(dx)^3} = \frac{d\left(\frac{d^2\mathfrak{X}}{(dx)^2}\right)}{dx} = -\ \frac{d\ \text{Cos. } x}{dx} = \text{Sin. } x$$

Demnach, für $x = 0$,

$$4)\ Y'' = \text{Sin. } 0^\circ = 0$$

$$\frac{d^4\mathfrak{X}}{(dx)^4} = \frac{d\ \text{Sin. } x}{dx} = \text{Cos. } x$$

folglich, für $x = 0$,

$$5)\ Y^{IV} = \text{Cos. } 0^\circ = 1$$

worauf dann wieder in derselben Ordnung 0, — 1, 0, 1 folgen u. s. f.

Also

$$\text{Cos. } x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

Auch hier genügen für die meisten Fälle der Ausübung, wenn x nicht über 20° beträgt, die beiden ersten Glieder; also

$$\text{Cos. } x = 1 - \tfrac{1}{2} x^2$$

und

$$x = \sqrt{2} \cdot \text{Sinv. } x$$

Auch hat man für solche Fälle genau genug

$$\text{d Sin. } x = dx - \frac{3x^2\,dx}{2 \cdot 3} = (1 - \tfrac{1}{2} x^2) \cdot dx$$

$$\text{d Cos. } x = \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot dx - \frac{2x}{1 \cdot 2} \cdot dx = (\tfrac{1}{6} x^3 - x) \cdot dx$$

Fünftes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf das Maximum und Minimum.

§. 157.

Wir haben diesen Gegenstand im I. Theil dieser Schrift im XV. Kapitel betrachtet. Wir dürfen ihn hier nicht übergehen, weil die Differentialrechnung das Verfahren abkürzt, und überdas noch zur Entscheidung, ob das Resultat einem Maximum oder ob es einem Minimum zugehört, ein besonderes Mittel darbiethet. Was hier verlangt wird, ist die Bestimmung desjenigen Werthes einer veränderlichen Größe x, wodurch eine zu x gehörige Funktion X den größten oder kleinsten Werth erhält. Wir wollen einen solchen Werth von X, der entweder ein Maximum oder ein Minimum ist, allgemein einen kulminirenden Werth nennen.

§. 158.

In einem gegebenen Systeme veränderlicher Größen x und y, die von einander abhängen, finden zwei Hauptfälle statt, welche §. 115. (Fig. I und II.) anschaulich dargestellt werden.

I. Fall. *) 1) Wir denken uns die Werthe von x von a aus auf af abgeschnitten, so daß ab, aα, aγ, ag,

*) Der IIte Fall kommt unten §. 162 vor.

a, etc. Werthe von x bezeichnen; die Perpendikel b c, α β, γ δ etc. sollen zugehörige Werthe der X bezeichnen, die eine Funktion von x ist. Zu einer Reihe nach einander folgender Werthe bis zu einer gewissen Gränze z. B. bis zu x = a g (Fig. I.) gehört zu jedem größeren Werthe von x auch ein größerer von X; aber über diese Gränze hinaus gehört zu jedem größeren Werthe von x ein kleinerer von X. In diesem Falle ist die gedachte Gränze, wie hier a g derjenige Werth von x, zu welchem ein Maximum von X gehört.

2) Zu einer Reihe zunehmender Werthe von x gehört, wie Fig. II., zuerst eine abnehmende von X bis zu einer gewissen Gränze a g; über diese Gränze hinaus folgt wieder eine zunehmende von X. Jetzt ist die gedachte Gränze (a g) derjenige Werth von x, für welchen X ein Minimum wird.

Im Falle (No. 1.) gehört $X + \Delta X$ zu $x + \Delta x$ bis zu einem bestimmten Werthe von $x + \Delta x$, den ich mit x' bezeichnen will; es ist also, so lange $x + \Delta x < x'$ ist, $\frac{\Delta X}{\Delta x}$ bejaht; ist aber im Falle (No. 1.) $x + \Delta x > x'$, so gehört zu $x + \Delta x$ ein $X - \Delta X$, und $\frac{\Delta X}{\Delta x}$ ist verneint. Ist daher (No. 1.) $\frac{dX}{dx} = 0$, so ist nothwendig $x = x'$ ein Maximum. Im Falle (No. 2.) ist es umgekehrt, und wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ wird, so ist $x = x$ nothwendig ein Maximum.

Allemal erhält man also (I. Fall No. 1 und 2.) einen kulminireuden Werth von X, wenn man $\frac{dX}{dx} = 0$ setzt,

und diese Gleichung giebt den zum kulminirenden Werth von X gehörigen Werth von x.

Ex. Es sey die Funktion $X = ax - \frac{1}{3}bx^3$ gegeben; so hat man $dX = adx - \frac{1}{3}.b.3x^2dx = (a - bx^2).dx$, folglich, für den kulminirenden Werth von X,

$$\frac{(a - bx^2).dx}{dx} \text{ oder } a - bx^2 = 0$$

$$\text{also } x = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Für diesen Werth von x ist $ax - \frac{1}{3}bx^3$ entweder ein Maximum oder ein Minimum.

§. 159.

Wenn x durch eine quadratische Gleichung bestimmt wird, welche verschiedene Werthe von X zur Folge haben (s. §. 160. 4tes Exempel), so können nicht beide Werthe von x zugleich das Maximum, auch nicht beide zugleich das Minimum von X geben. Es muß also in solchem Falle der eine zum Maximum, und der andere zum Minimum gehören. Ist die Natur des Gegenstandes von der Art, daß sie keinen verneinten Werth von x zu läßt, so kann, wenn der eine Werth verneint wäre, nur der bejahte zugelassen werden. Verneinte Werthe, in welche X übergeht, werden als fortdauernde Abnahmen von X angesehen. Wenn daher x zwei Werthe hat, wovon der eine einen bejahten und der andere einen verneinten Werth von X giebt, so wird ersterer als das Maximum, und letzterer als das Minimum betrachtet. Man kann aber auch sagen: man erhält in solchem Falle zwei Maxima: ein bejahtes Größtes und ein verneintes Größtes.

Ex. Für den vorigen Ausdruck $ax - \frac{1}{3}bx^3$ sey $a = 36$, $b = 4$, also

$$36\,x - \tfrac{4}{3}\,x^3 = \mathfrak{X}$$

so hat man für ein kulminirendes $\mathfrak{X}$

$$x = \sqrt{\frac{36}{4}} = \pm 3$$

Der bejahte Werth von x giebt

$$\mathfrak{X} = 36 \cdot 3 - \tfrac{4}{3} \cdot 27 = +72$$

der verneinte

$$\mathfrak{X} = -36 \cdot 3 + \tfrac{4}{3} \cdot 27 = -72$$

Jeder andere Werth von x giebt für $\mathfrak{X}$ eine kleinere Zahl als die 72, sie mag nun bejaht oder verneint werden.

§. 160.

Einige Anwendungen dieser Lehre.

1. Ex. mnp (Fig. 5.) sey ein willkührliches Dreieck, ab der mn gleichlaufend, und ad, bc auf mn senkrecht, also abcd ein Rektangel; man soll den Punkt a so in der Seite mp nehmen, daß abcd ein Maximum d. h. das größtmögliche Rektangel wird, welches sich im Dreieck mnp verzeichnen läßt.

Aufl. Es sey $mp = a$, $pq = b$, $mn = c$, die noch unbekannte $ma = x$, $ad = y$, so ist

$$x : y = a : b; \quad \text{also } y = \frac{b}{a} \cdot x$$

Ferner

$$pa : ab = pm : mn$$

also

$$ab = \frac{pa \cdot mn}{pm} = \frac{pa \cdot c}{a} = \frac{(a - x) \cdot c}{a}$$

Es soll also

$$ad \times ab \text{ oder } \frac{b}{a} \cdot x \cdot \frac{(a - x) \cdot c}{a}$$

$$\text{oder } \frac{bc}{a^2} \cdot (ax - x^2)$$

ein Maximum seyn.

Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn $ax - x^2$ ein Maximum wird, weil $\frac{bc}{a^2}$ ein unveränderlicher Faktor ist. Nun erhält man

$$d(ax - x^2) = adx - 2xdx = (a - 2x) \cdot dx$$

also

$$\frac{d(ax - x^2)}{dx} = a - 2x$$

Für das Maximum muß man $a - 2x = 0$ setzen (Die Natur des Objekts zeigt, daß man kein Minimum sondern ein Maximum erhält; das Minimum würde $= 0$ seyn). Demnach

$x = \frac{1}{2} a$ oder in der Fig. $ma = \frac{1}{2} mp$

2. Ex. Ein cylindrisches blechernes Gefäß soll einen verlangten kubischen Inhalt K haben; wie groß muß der Durchmesser der Grundfläche seyn, damit Boden und cylindrische Wand zusammengenommen das wenigste Blech erfordern?

Der Durchmesser der Bodenfläche sey x, die Höhe des Cylinders $= h$, so ist die Bodenfläche $= 0{,}785 \cdot x^2$, also $K = 0{,}785 \cdot x^2 h$, und $h = \frac{K}{0{,}785 \cdot x^2}$.

Die cylindrische Wandfläche ist $3{,}14 \cdot x \cdot h$, also Summe der Boden- und Wandfläche

$$= 0{,}785 \cdot x^2 + 3{,}14 \cdot x \cdot h$$

$$= 0{,}785 \cdot x^2 + 3{,}14 \cdot x \cdot \frac{K}{0{,}785 \cdot x^2}$$

$$= 0{,}785 \cdot x^2 + \frac{4K}{x} = \mathfrak{X}$$

Jetzt soll x so bestimmt werden, daß man den kulminirenden Werth von $\mathfrak{X}$ erhält.

Es muß also $\frac{d\mathfrak{X}}{dx}$ oder $0{,}785 \cdot x - \frac{2K}{x^2} = 0$ seyn.

Daher

$$x = \sqrt[3]{\frac{2K}{0{,}785}}$$

Daß dieser Werth kein Maximum sondern das verlangte Minimum geben müsse, erhellet aus der Natur der Sache; denn um das Maximum zu erhalten, müßte x unendlich groß werden, und h unendlich klein.

3. Ex. Ueber einer geraden AB (Fig. 6.) sind zwei Punkte b und c von willkührlicher Lage gegeben; es wird ein Punkt in der geraden AB gesucht, der eine solche Lage habe, daß gerade Linien aus solchem nach b und c gezogen die kleinstmögliche Summe geben.

Aufl. a sey der gesuchte Punkt, so soll ab + ac ein Minimum seyn. Es seyen nun bd und ce auf AB senkrecht, und $ab = v$, $ac = z$, $bd = \beta$, $ce = \gamma$, $de = \alpha$ und $da = x$, so ist $v^2 = \beta^2 + x^2$, $z^2 = \gamma^2 + (\alpha - x)^2$; es soll also $v + z$ ein Minimum seyn, oder $\frac{dv + dz}{dx} = 0$. Es ist aber $dv = \frac{x}{v} \cdot dx$; $dz = \frac{\alpha - x}{z} \cdot d(\alpha - x)$

Hiernach findet man

$$\frac{x}{v} = \frac{\alpha - x}{z} \text{ d. i. } \frac{ad}{ab} = \frac{ae}{ac}$$

oder

Cos. bad = Cos. eac, also bad = eac

Die Konstruktion gleicher Einfallswinkel bei a ist also die Bedingung für die Lage des gesuchten Punkts a.

Die hiermit bestimmte Aehnlichkeit der beiden Dreiecke abd mid ace giebt nun die Proportion $x : (\alpha - x) = \beta : \gamma$ also

$$x = \frac{\beta\alpha}{\beta + \gamma}$$

Anm. Der schönste und lichtvollste Weg zu einer mathematischen Bestimmung bleibt immer die geometrische Konstruktion. Es giebt Fälle, wo wir ohne solche Rechnungen durch einfache geometrische Konstruktion zu dem gesuchten kulminirenden Werthe gelangen können. Im vorstehenden Beispiele verlängere man nur bd bis δ, so daß dδ = bd wird; dann ziehe man die δc, der Durchschnittspunkt a ist der gesuchte Punkt. Denn es ist allemal ca + ab, wo auch a genommen werden mag = ca + aδ. Aber ca + aδ wird am kleinsten, wann caδ eine gerade Linie ist.

4. Ex. ab (Fig. 7.) sey der Durchmesser eines Kreises, man soll der ab gleichlaufend eine Sehne df so ziehen, daß sie mit den zugehörigen Perpendikeln de und fg das größtmögliche Rektangel im Halbkreise bildet. (s. die Vorerinner.)

Es sey ae = x, ed = y, ab = E, so ist x : y = y : (E − x), daher $y = \sqrt{(Ex - x^2)}$, und e : g = E − 2x. Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Rektangels degf mit X, so hat man

$$X = y \cdot (E - 2x) = (\sqrt{(Ex - x^2)}) \cdot (E - 2x)$$

$$dX = (E - 2x) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (Ex - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (Edx - 2xdx)$$

$$- (Ex - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2dx$$

und

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} = \frac{(E - 2x)^2}{2.(Ex - x^2)^{\frac{1}{2}}} - 2(Ex - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Folglich für das Maximum von $\mathfrak{X}$

$$\frac{(E - 2x)^2}{2(Ex - x^2)^{\frac{1}{2}}} - 2.(Ex - x^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

also auch noch

$$(E - 2x)^2 - 4.(Ex - x^2) = 0$$

woraus man

$$x = \tfrac{1}{2}E \pm \sqrt{((\tfrac{1}{4}E)^2 + (\tfrac{1}{4}E)^2)}$$

findet. Hier geben beide Werthe von x nach der Natur des Kreises einerlei Werth von $\mathfrak{X}$, daher hier der Satz (§. 159. am Anfang) keine Anwendung findet.

Macht man $cm = mn = \frac{1}{4}E$, so ist cn (die Hypotenuse des rechtwinklichten Dreiecks) $= \sqrt{((\frac{1}{4}E)^2 + (\frac{1}{4}E)^2)}$, also

$$x = \tfrac{1}{2}E \pm cn$$

Man darf also nur ce oder $cg = cn$ nehmen, so erhält man

1) $x = ae$
2) $x = ag$

} In beiden Fällen einerlei Rektangel degf $= \mathfrak{X}$.

5. Ex. Vier gegebene gerade Linien a, b, c, e (Fig. 8.) sollen so an ihren Endpunkten zusammengesetzt werden, daß sie das größtmögliche Viereck bilden, das sich aus diesen 4 Seiten konstruiren läßt; unter welchen Winkeln müssen sie zusammenstossen?

Wir wollen den Winkel, welchen die Seiten a und b einschliessen, mit x, und den entgegengesetzten, welche die c und e einschliessen, mit y bezeichnen; ist nun $\mathfrak{X}$ der Inhalt des Vierecks, so hat man

$$\mathfrak{X} = \tfrac{1}{2}\,a\,.\,b\,.\,\text{Sin.}\,x + \tfrac{1}{2}\,c\,.\,e\,.\,\text{Sin.}\,y$$

also

$$d\mathfrak{X} = \frac{ab\,.\,\text{Cos.}\,x\,.\,dx + ce\,.\,\text{Cos.}\,y\,.\,dy}{2} \quad (\mathfrak{C})$$

Es muß aber dieser Werth auf einerlei Differential, entweder blos auf dx oder blos auf dy reducirt werden. Nun ist

$$a^2 + b^2 - 2ab\,.\,\text{Cos.}\,x = c^2 + e^2 - 2ce\,.\,\text{Cos.}\,y$$

Daher

$$\text{Cos.}\,y = \frac{c^2 + e^2 - a^2 - b^2 + 2ab\,.\,\text{Cos.}\,x}{2ce}$$

$$d\,\text{Cos.}\,y \text{ oder } -\text{Sin.}\,y\,.\,dy = \frac{2ab\,.\,d\,\text{Cos.}\,x}{2ce}$$

$$= -\frac{ab}{ce}\,.\,\text{Sin.}\,x\,.\,dx$$

Also

$$dy = \frac{ab}{ce}\,.\,\frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,y}\,.\,dx$$

Daher in $(\mathfrak{C})$

$$d\mathfrak{X} = \frac{ab\,.\,\text{Cos.}\,x\,dx + ce\,.\,\text{Cos.}\,y\,.\,\frac{ab}{ce}\,.\,\frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,y}\,.\,dx}{2}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} = \frac{ab\,.\left(\text{Cos.}\,x + \frac{\text{Cos.}\,y\,.\,\text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,y}\right)}{2}$$

Da dieser Quotient für das Maximum $= 0$ seyn muß, so bleibt auch noch

$$\text{Cos.}\,x + \frac{\text{Cos.}\,y\,.\,\text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,y} = 0$$

oder

$$\text{Cos.}\,x\,.\,\text{Sin.}\,y + \text{Cos.}\,y\,.\,\text{Sin.}\,x = 0$$

d. i. Sin. $(x + y) = 0$, folglich

$$x + y = 180°$$

6. Ex. Aus einem abgekürzten Kegel ABCD (Fig. 9.) das größte Parallelepipedum zu schneiden, dessen obere und untere Grundfläche Quadrate sind.

Der obere Halbmesser mC sey $= r$, der untere Ao $= R$, $Ao - Cm = R - r = \delta$, $mo = h$, $mn = x$, so ist $na = Cm + \frac{mn}{mo} \cdot (R - r) = r + \frac{x}{h}(R - r)$.

Ueberdas $nb = an$, also

$$ab^2 = 2 \cdot \left(r + \frac{x}{h} \cdot (R - r)\right)^2$$

und, wenn wir den Inhalt des zum Rektangel abcd gehörigen Parallelepipedums von der Höhe no mit $\mathfrak{X}$ bezeichnen,

$$\mathfrak{X} = no \times ab^2 = (h - x) \cdot 2 \cdot \left(r + \frac{x}{h}(R - r)\right)^2$$

$$= 2(h - x) \cdot \left(r^2 + \frac{2rx}{h} \cdot (R - r) + \frac{x^2}{h^2} \cdot (R - r)^2\right)$$

$$= 2 \cdot \left\{ hr^2 - r^2 x + 2r(R - r) \cdot x - \frac{2r(R - r)}{h} \cdot x^2 + \frac{(R - r)^2}{h} \cdot x^2 - \left(\frac{R - r}{h}\right)^2 \cdot x^3 \right\}$$

$$= 2 \cdot \left\{ hr^2 + (2Rr - 3r^2)x + \frac{(R - 3r) \cdot (R - r)}{h} x^2 - \left(\frac{R - r}{h}\right)^2 x^3 \right\}$$

also $d\mathfrak{X} =$

$$2 \cdot \left(2R - 3r^2 + \frac{(R - 3r) \cdot (R - r)}{h} \cdot 2x - \left(\frac{R - r}{h}\right)^2 \cdot 3x^2\right) \cdot dx$$

also für das Maximum

$$2Rr - 3r^2 + \frac{(R-3r).(R-r)}{h}.2x - \left(\frac{R-r}{h}\right)^2.3x^2 = 0$$

und

$$x^2 - \frac{2(R-3r).h}{3.(R-r)}.x = \frac{(2R-3r).rh^2}{3(R-r)^2}$$

Demnach

$$x = \frac{(R-3r).h \pm h\sqrt{R^2}}{3(R-r)}$$

Da hier das verneinte Zeichen in der Anwendung auf den vorliegenden Fall keinen Gebrauch hat, so hat man

$$x = \frac{R-3r+R}{3(R-r)}.h = \frac{2R-3r}{3(R-r)}.h$$

oder auch

$$x = \frac{\frac{2}{3}R-r}{R-r}.h$$

Für einen vollständigen Kegel oder $r = 0$ wäre also $x = \frac{2}{3}h$.

Wäre bei einem abgekürzten Kegel $r = \frac{2}{3}R$, so hätte man $x = 0$, und um so mehr bleibt für alle Fälle, wo $r > \frac{2}{3}R$ wäre, für das Maximum von X das zugehörige $x = 0$, weil verneinte Werthe von x ausgeschlossen bleiben.

§. 161.

Wäre die vorgelegte Frage nicht von der Art, daß sich aus der Natur des Gegenstandes erkennen ließe, ob man ein Maximum oder ein Minimum finden werde, so können zwar ein Paar Anwendungen in Zahlen hierüber bald entscheiden. Aber eine nochmalige Anwendung der Differentialrechnung macht solche Proben entbehrlich.

Für jeden anderen Werth von x erhält nämlich auch $\frac{dX}{dx}$ einen anderen Werth, oder es ist $\frac{dX}{dx}$ selbst eine veränderliche Größe.

Im Ex. §. 158. ist $\frac{d\left(\frac{dX}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(a-bx^2)}{dx} = -2bx.$

Setzt man nun in diesem allgemeinen Werthe von $\frac{d\left(\frac{dX}{dx}\right)}{dx}$ statt x den dort gefundenen allgemeinen Werth von x, nämlich $\sqrt{\frac{a}{b}}$, so wird für dasjenige x, für welches X ein Größtes oder Kleinstes wird,

$$\frac{d\left(\frac{dX}{dx}\right)}{dx} = -2b \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = -2\sqrt{ab}$$

Dieses giebt zu erkennen, daß der bejahte Werth von x (er ist nämlich sowohl $+\sqrt{\frac{a}{b}}$ als $-\sqrt{\frac{a}{b}}$) nicht zunehmen kann, ohne daß $d\left(\frac{dX}{dx}\right)$ abnehme, oder daß zu wachsenden Werthen von x abnehmende von $\frac{dX}{dx}$ also auch abnehmende von X gehören, daß also zu $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ das Maximum von X gehöre.

Um also zu entscheiden, ob der aus $\frac{dX}{dx} = 0$ sich ergebende Werth von x die Funktion X zu einem Maximum oder zu einem Minimum mache, darf man nur das vorstehende Verfahren anwenden. Giebt nämlich die Gleichung

$\frac{dX}{dx} = 0$ den Werth von $x = A$, so setzt man im allgemeinen Werthe von $\frac{d\left(\frac{dX}{dx}\right)}{dx}$ die Größe A statt x; findet man nun einen bejahten oder einen verneinten Werth, so zeigt ersterer an, daß X ein Minimum; letzterer, daß X ein Maximum sey.

§. 162.

Alle bisherige Sätze beziehen sich auf §. 158. I. Fall. Also jetzt II. Fall.

1) Wenn zu jedem größeren Werthe von x auch ein größerer von X gehört. Sind in diesem Falle die Werthe von x unbeschränkt, dann wird nur für $x = \infty$ (für ein unendliches x) der Werth von X ein Größtes und meistens $X = \infty$, aber nicht allemal. Z. B. Zu jeder größeren Tangente gehört auch ein größerer Sinus, aber zur unendlichen Tangente gehört kein unendlicher Sinus.

2) Gehört zu jedem größeren Werthe von x ein kleinerer von X, so wird bei unbeschränkten Werthen von x, für $x = \infty$ der zugehörige Werth von X ein Minimum und meistens $= 0$.

Anm. Anfänger müssen sich die Anwendung dieser Lehre ganz geläufig zu machen suchen. Hierzu giebt ihnen Snell's Sammlung von Uebungsaufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten hinlängliche Gelegenheit. Auch findet man in einer vor mehreren Jahren erschienenen Schrift von Busse, welche diese Lehre zum Gegenstande hat, schöne hierher gehörige Bemerkungen.

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf Differentialverhältnisse bei Flächen- und Körperänderungen. *)

§. 163.

Auf der geraden Linie AB (Fig. 10.), über welcher die amnopqr hinstreicht, lassen sich Stücke wie Aa, Bb, Cc etc. abschneiden, welche Abscissen genennt werden; das am Ende einer solchen Abscisse bis zur oberen aufgerichtete Perpendikel (wie am, bn etc.) heißt eine senkrechte Ordinate. Ist nun zwischen Abscissen und Ordinaten eine allgemeine Gleichung gegeben, so heißt solche eine Gleichung für die Linie (hier Ar).

Bezeichnet man die Abscissen mit x, die zugehörigen Ordinaten mit y, und das von beiden und der krummen

*) Ich hatte anfänglich nicht die Absicht, die höhere Geometrie besonders vorzutragen; ich wollte der Integralrechnung nur einige Beispiele ihrer Anwendung beifügen, wozu hier das VI. und das folgende VIIte Kapitel als Vorbereitung nöthig waren. Erst später entschloß ich mich, das Wichtigste aus der höheren Geometrie in einem IIIten Theile besonders vorzutragen. Diesem Umstande hat man die sonst unschickliche Trennung dieser beiden Kapitel von der höheren Geometrie zuzuschreiben.

Linie begränzte Flächenstück (z. B. A c o) mit $\mathfrak{X}$, so ist jedes hinzukommende Abscissenstück (z. B. c e) $=\Delta x$, die zugehörige Aenderung der Ordinate (wie q s) $=\Delta y$, die zugehörige Flächenänderung (wie c e q o) $=\Delta\mathfrak{X}$. Eine solche Flächenänderung wie c e q o ist allemal aus 2 Stükken zusammengesetzt, einem Rektangel c e s o $= y.\Delta x$, und dem vermischtlinigen Dreieck o s q. Drucken wir die mittlere Höhe des Dreiecks o s q durch (ϕy) aus, so hat man allgemein

$$\Delta\mathfrak{X} = y.\Delta x + (\phi y).\Delta x = (y + (\phi y)).\Delta x$$

also das allgemeine Differenzverhältniß

$$\frac{\Delta\mathfrak{X}}{\Delta x} = y + \phi y$$

Wird d x aus Δx, so wird zugleich d $\mathfrak{X}$ aus $\Delta\mathfrak{X}$, und d y aus ϕy; da nun $y + dy$ mit y einerlei ist, so hat man den allgemeinen Differentialquotient

XCV. $$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} = y, \text{ also } d\mathfrak{X} = y\,dx$$

wo y d x nicht mehr als Fläche angesehen werden kann, sondern nur als Form des Ausdrucks, in welchen die Funktion von $\Delta\mathfrak{X}$ übergeht, wenn d x aus Δx wird.

§. 164.

Ist A c $= x$, c o $= y$, c d sehr klein $=$ o v $=\Delta x$, also p v $=\Delta y$, und setzt man die Länge von A m n o $= s$, also o p $= d s$, so ist beinahe o p $=\sqrt{(ov^2 + pv^2)}$, oder beinahe

$$\Delta s = \sqrt{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}$$

oder

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}} = 1$$

Dieser Quotient wird nur dann in völliger Schärfe richtig, wann Δ sich in d verwandelt; also in aller Strenge

XCVI. $$\begin{cases} \dfrac{ds}{\sqrt{((dx)^2 + (dy)^2)}} = 1 \\ \text{oder} \\ ds = \sqrt{((dx)^2 + (dy)^2)} \end{cases}$$

§. 165.

Ein körperlicher Raum oder geometrischer Körper, in welchem eine gerade Linie statt findet, durch welche alle senkrechte Durchschnitte Kreise bilden, heißt ein runder oder sphäroidischer Körper oder auch ein Sphäroid. Die gerade Linie, in welcher die Mittelpunkte aller parallelen Kreise liegen, heißt die Axe des Spharoids, deren Anfang in der sphäroidischen Oberfläche liegt.

Man denke sich auf dieser Axe ein Stück als Abscisse vom Anfange genommen $= x$, die bis zur Aussenfläche genommene zugehörige senkrechte Ordinate $= y$, so ist die zugehörige Kreisfläche $= \pi . y^2$; die zu $x + \Delta x$ gehörige Kreisfläche ist $\pi . (y + \Delta y)^2$, bezeichnen wir also das abgeschnittene sphäroidische Stück mit $\mathfrak{X}$, so ist, wenn Δx sehr klein genommen wird, beinahe $\Delta \mathfrak{X} = \pi . (y + \Delta y)^2 . \Delta x$, und $\dfrac{\Delta \mathfrak{X}}{\Delta x} = \pi (y + \Delta y)^2$, also in völliger Schärfe

XCVII. $$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{X}}{dx} = \pi y^2 \text{ und} \\ d\mathfrak{X} = \pi y^2 . dx \end{cases}$$

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung gewisser geraden Linien, deren Lage und Größe von einer gegebenen krummen abhäng.

§. 166.

AG (Fig. 11.) sey die zur krummen AD gehörige Abscissenaxe, auf der die Abscissen, wie $Az = x$, und die Ordinaten $zb = y$ genommen werden; die gerade $m\tau$ berühre die krumme in b, so heißt hier $b\tau$ die Tangente der krummen, welche zur Abscisse x gehört; $z\tau$ ist die zugehörige Subtangente; $b\lambda$, welche mit der Tangente einen rechten Winkel macht, die zu x gehörige Normale, und λz die zugehörige Subnormale.

§. 167.

Die einzige krumme Linie, welche in allen Stellen einerlei Krümmung hat, ist die Kreislinie. Aber jede Kreislinie von einem andern Durchmesser hat eine andere Krümmung, die von der geraden desto schneller abweicht, je kleiner der Halbmesser ist. Daher können alle mögliche Krümmungen mit der einer Kreislinie von irgend einem Halbmesser verglichen werden. Derjenige Kreis, welcher

mit einer gegebenen Stelle einer krummen Linie einerlei Krümmung hat, heißt für diese Stelle der krummen Linie der Krümmungskreis, und der zugehörige Halbmesser der Krümmungshalbmesser für diese Stelle.

§. 168.

Aufg. Für eine krumme Linie, wie AD (Fig. 11.) deren Gestalt durch eine Gleichung zwischen Abscissen x und Ordinaten y gegeben ist, die zu jedem x und y gehörige Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale allgemein zu bestimmen.

Aufl. AB sey ein von A aus willkührlich angenommenes Stück der krummen Linie, und bc kaum merkbar, also $Az = x$, $zb = y$, $zv = \Delta x$, $cw = \Delta y$ und zr die zugehörige Subtangente, so ist beinahe $cw : wb = bz : rz$, also

$$\text{beinahe } rz \text{ oder Subt.} = \frac{y \cdot \Delta x}{\Delta y}$$

und in völliger Schärfe

$$\text{XCVIII. Subt.} = \frac{y\,dx}{dy}.$$

Ebenso beinahe Subnorm. $= \frac{y\,\Delta y}{\Delta x}$, und in aller Strenge

$$\text{XCIX. Subnorm.} = \frac{y\,dy}{dx}$$

also

$$\text{C.} \begin{cases} \text{Tang.} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2}\right)} \\ = \frac{y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} \end{cases}$$

und

Cl. $$\left\{\begin{array}{l} \text{Norm.} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2}\right)} \\ = \frac{y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} \end{array}\right.$$

§. 169.

Aufg. $ab = x$ (Fig. 12.) sey eine auf aq willkührlich abgeschnittene Abscisse, $bd = y$ die zugehörige Ordinate, $bc = \Delta x$, $ge = \Delta y$, dm die zu x gehörige Normale, en die zu $x + \Delta x$ gehörige, also bm, bn die zu x und $x + \Delta x$ gehörigen Subnormalen. Man soll für die krumme Linie den Krümmungshalbmesser an der Stelle d bestimmen.

Aufl. de sey ein so kleines Stückchen, daß es von einer mit kd beschriebenen Kreislinie sinnlich nicht mehr abweiche, so muß k sehr genau derjenige Punkt seyn, in welchem die Normalen dm und en verlängert einander durchschneiden. Dieser Durchschnittspunkt ist also sehr genau der Mittelpunkt der Krümmung und dk sehr genau der Krümmungshalbmesser. Ist df der mn gleichlaufend, so ist

$$km : mn = kd : df$$

also

$$kd = \frac{km \cdot df}{mn} = \frac{(kd - md) \cdot df}{mn}$$

Hieraus giebt sich

$$kd = \frac{md \cdot df}{df - mn}$$

Hier ist kd in aller Schärfe der Krümmungshalbmesser, wenn wir dx, dy statt Δx, Δy gebrauchen.

Es ist aber

$$md = \text{Norm.} = \frac{y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

$$mn = d\,\text{Subn.} + dx = d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) + dx$$

$$df = dg + gf = dg + \frac{cn \cdot eg}{ec} =$$

$$dx + \frac{\text{Subn.}\ dy}{y}$$

$$= dx + \frac{\left(\frac{y\,dy}{dx} \cdot dy\right)}{y} = \frac{dy^2 + dx^2}{dx}$$

Also, wenn wir den Krümmungshalbmesser mit r bezeichnen,

$$r = \frac{\frac{y\,(dx^2 + dy)^{\frac{1}{2}}}{dx} \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{dx}}{\frac{dx^2 + dy^2}{dx} - d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) - dx}$$

$$= \frac{y \cdot (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot (dx^2 + dy^2) - dx^2 \cdot d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) - dx^3}$$

Druckt man also $y\,dy$ durch $(\phi x) \cdot dx$ aus (wo (ϕx) nur eine Funktion von x bezeichnen soll), oder differentiirt man $\frac{y\,dy}{dx}$ blos nach y und dy, so wird

$$r = \frac{y \cdot (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx \cdot dy^2 - dx^2 \cdot \frac{y\,ddy + dy \cdot dy}{dx} - dx^3}$$

$$= \frac{y \cdot (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot dy^2 - dx \cdot dy^2 - y \cdot dx \cdot ddy}$$

oder

CII. $r = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot ddy}$ wofür man auch $r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(d\left(\frac{dx}{dy}\right)\right) \cdot dy^2}$ schreiben kann.

Differentiirt man aber $\frac{y\,dy}{dx}$ blos nach dx und y, so wird

CIII. $r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy \cdot ddx}$ wofür man auch $r = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) \cdot dx^2}$ setzen kann.

§. 170.

Aufg. aMNz (Fig. 13. u. 14.) sey eine krumme Linie; mp, nN Berührungslinien an M und N. M ist ein willkührlich angenommener Punkt der krummen Linie, CQ ein Perpendikel aus einem angenommenen Punkte C auf die Berührungslinie Mm; MN, Nz sind ein Paar nach einander folgende Theilchen der krummen Linie, und Cv auf Nn senkrecht. Ms ist ein mit CM beschriebener Kreisbogen. Es wird eine Gleichung zwischen $CM = y$ und $CQ = t$ vorausgesetzt; man soll für die Stelle M den Halbmesser der Krümmung finden.

Aufl. 1. Es sey L der Punkt, wo das Perpendikel Cv die Mm schneidet, so sind die Dreiecke QCL und vHL einander ähnlich, also

$$vL : Hv = QL : CQ$$

oder

$$v\mathfrak{k} : Q\mathfrak{k} = Hv : CQ$$

2. Auch ist $Cv - CQ = \Delta t$; aber $Cv - CQ = CL \pm \mathfrak{k}v - CQ = \sqrt{(CQ^2 + Q\mathfrak{k}^2)} \pm \mathfrak{k}v - CQ$.

Das Verhältniß $\frac{\Delta t}{Q\mathfrak{k}}$ nähert sich also dem

$$\frac{CQ + \frac{Q\mathfrak{k}^2}{2.CQ} \pm \mathfrak{k}v - CQ}{Q\mathfrak{k}}$$ oder dem $\frac{Q\mathfrak{k}}{2.CQ} \pm \frac{v\mathfrak{k}}{Q\mathfrak{k}}$

desto mehr, je kleiner $\frac{Q\mathfrak{k}}{CQ}$ also auch Δt wird. Für $\Delta t = dt$ hat man in aller Strenge $\frac{dt}{Q\mathfrak{k}} = o \pm \frac{v\mathfrak{k}}{Q\mathfrak{k}}$, oder $dt = \pm v\mathfrak{k} = \pm Hv.\ tang.\ vH\mathfrak{k} = \pm Hv.\ tang.\ MKN$.

3. Je näher aber N in M rückt, desto näher kommt die CN der CM, und die Nn der Mm, folglich auch die Stelle v der Q, und die H der M, so daß für MKN $= o$ oder für $\Delta s = ds$ in aller Schärfe v in Q, und H in M fällt, oder $Hv = MQ$ wird.

In eben diesem Falle wird aber auch tang. MKN (= Kreisbogen des Winkels MKN; denkt man sich nun mit KM den Bogen Ms beschrieben, so ist, für dt, MN $= ds$, und Bog. des Wink.ls $MKN = \frac{MN}{MK}) = \frac{MN}{MK} = \frac{ds}{r}$; also, für dt, tang. $MKN = \frac{ds}{r}$ und (No. 3.)

$$dt = \pm MQ.\frac{ds}{r} = \frac{ds.\sqrt{(CM^2 - CQ^2)}}{r} = \frac{ds.\sqrt{(y^2 - t^2)}}{r}$$

$$= \frac{\sqrt{((y^2 - t^2).ds^2)}}{r}$$

und nun

$$r = \frac{\sqrt{((y^2 - t^2) \cdot ds^2)}}{dt}$$

4. Nun ist, für $MN = ds$ und $rN = dy$,

$$\sqrt{(ds^2 - dy^2)} = Mr$$

also

$$\text{Fläche } CMr = \tfrac{1}{2} CM \cdot Mr = \tfrac{1}{2} y \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$$

Aber für $\Delta t = dt$ fallen CMr und CMN zusammen, und es wird

$$\text{Fläche } CMr = \text{Fläche } CMN = \tfrac{1}{2} t \cdot ds$$

also

$$\tfrac{1}{2} y \cdot \sqrt{(ds^2 - dy^2)} = \tfrac{1}{2} t \cdot ds$$

$$y^2 (ds^2 - dy^2) = t^2 \cdot ds^2$$

und

$$(y^2 - t^2) \cdot ds^2 = y^2 dy^2$$

Demnach (No. 3.)

$$\text{CIV. } r = \frac{\sqrt{y^2 dy^2}}{dt} = \frac{y dy}{dt}$$

Ex. Es sey $t^2 = ay - y^2$, so hat man $2tdt = ady - 2ydy$, also

$$dt = \frac{(a - 2y) \cdot dy}{2t} = \frac{(a - 2y) \cdot dy}{2\sqrt{(ay - y^2)}}$$

Daher

$$r = \frac{ydy \cdot 2\sqrt{(ay - y^2)}}{(a - 2y) \cdot dy} = \frac{2y\sqrt{(ay - y^2)}}{a - 2y}$$

§. 171.

Wenn die Krümmung einer krummen Linie so beschaffen ist, daß darin ein konkaver Bogen in einen konvexen übergeht, wie die m n o (Fig. 15.), so heißt der Punkt n, in welchem der konkave aufhört und der konvexe anfängt, ein **Wendungspunkt** der krummen Linie.

In diesem Falle muß die Lage des Krümmungshalbmessers für Punkte, die auf verschiedenen Seiten von n liegen z. B. für die Punkte a und q verschieden seyn; solche Krümmungshalbmesser müssen auf verschiedene Seiten der krummen Linie fallen. Man muß daher für Punkte, in welchen der Krümmungshalbmesser eine den zugehörigen Ordinaten entgegengesetzte Lage hat, einen verneinten Werth des Krümmungshalbmessers finden. Umgekehrt, wenn die Gleichung für die krumme Linie den Krümmungshalbmesser für irgend eine Stelle verneint giebt, die zugehörige Ordinate als bejaht angenommen, so muß die Lage desselben an dieser Stelle der Lage der zugehörigen Ordinate entgegengesetzt seyn. Kehrt die krumme Linie an einer Stelle der zugehörigen Ordinate die konkave Seite zu, so hat der Krümmungshalbmesser mit der Ordinate einerlei Lage, in Bezug auf das bejaht- oder verneintseyn; kehrt aber die krumme Linie der zugehörigen Ordinate die konvexe Seite zu, so hat der zugehörige Krümmungshalbmesser eine der Ordinate entgegengesetzte Lage.

Findet man also den zu einer als bejaht angenommenen Ordinate zugehörigen Krümmungshalbmesser verneint, so ist die zugehörige Stelle der krummen Linie (d. h. irgend ein kleines Theilchen der krummen Linie an dieser Stelle) gegen die Ordinate konvex, sonst allemal konkav.

Für den Wendungspunkt n ist die Krümmung weder konkav noch konvex; beide Theile der krummen Linie (der konkave und der konvexe) haben an dieser Stelle eine gemeinschaftliche Berührungslinie, und die einander entgegengesetzten Krümmungshalbmesser fallen für diese Stelle in eine einzige gerade Linie, so daß man für diese Stelle ebensowohl den bejahten als den verneinten Halbmesser nehmen kann. An einer solchen Stelle ist kein Theilchen der krum-

men Linie konkav und keines konver. Daher müssen für diese Stelle beide einander entgegengesetzte Krümmungshalbmesser unendlich groß werden.

Um daher für eine krumme Linie, deren Krümmung sich nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert, den Wendungspunkt zu finden, darf man nur den allgemeinen Werth von r (§. 169. und §. 170.) $= \infty$ (unendlich) setzen, und nun den Werth der zugehörigen Abscisse oder Ordinate suchen, welcher der Bedingung Genüge thut, daß $r = \infty$ werde.

Im vorigen Beispiele erhält man

$$\frac{2y\sqrt{(ay - y^2)}}{a - 2y} = \infty$$

also

$$a - 2y = 0, \text{ oder } y = \tfrac{1}{2}a.$$

Kommt im Nenner keine Differenz von Größen vor, die $= 0$ werden könnte, oder ist überhaupt der Nenner so beschaffen, daß er nicht durch irgend einen Werth einer veränderlichen Größe auf 0 gebracht werden kann, so wird der unendliche Werth von r nur dadurch möglich, daß eine von den veränderlichen Größen im Zähler unendlich wird. Dann ist also der Wendungspunkt unendlich entfernt. Die Bedeutung davon ist, daß sich eine solche krumme Linie der Stelle, wo sie ihre vorhergehende Konkavität oder Konvexität völlig verlohren hat, ohne Ende nähert, oder daß die krumme Linie immer mehr von ihrer Krümmung verliehrt, immer mehr gerade wird, ohne jedoch jemals in eine völlig gerade wirklich überzugehen.

Man kann aber auch für $r = \infty$ etwas unmögliches finden, wenn man, um $r = \infty$ zu erhalten, im Zähler eine veränderliche Größe $= \infty$ nimmt. Dieses ist der Fall, wenn keine der im Zähler vorkommenden verän-

derlichen Größen, nach der Natur der krummen Linie, unendlich werden kann z. B. die Abscissen und Ordinaten in einem Kreise von bestimmtem Halbmesser.

§. 172.

Ist die Gestalt einer krummen Linie durch eine Gleichung zwischen Abscissen x und Ordinaten y bestimmt, und ist die Gleichung zwischen x und y so beschaffen, daß zu jedem größeren Werthe von x ein kleinerer von y gehört, und daß durch hinlängliche Vergrößerung von x der Werth von y der o (Null) so nahe, als man immer will, gebracht werden kann, oder daß umgekehrt durch endlose Vergrößerung von y der zugehörige Werth von x so nahe als nur immer gefordert werden kann an o kommt, so heißt im ersteren Falle die unendliche Abscissenaxe, im letzteren die am Anfange der Abscissenaxe stehende unendliche Ordinate eine Asymptote der krummen Linie. Die Asymptote ist also eine gerade Linie, die ohne Ende verlängert einer neben ihr in derselben Ebene liegenden gleichfalls ohne Ende fortgesetzten krummen immer näher kommt, so daß der Abstand beider von einander kleiner als jede angebliche Entfernung werden kann.

§. 173.

Aufg. Aus der Gleichung für eine krumme Linie zu bestimmen, ob und wie sich ihr eine Asymptote ziehen lasse.

Aufl. αq (Fig. 16.) sey die Asymptote, so kann solche so angesehen werden, als wäre sie für einen unendlich entfernten Punkt q eine Tangente an der krummen Linie. Für diese Stelle ist also wie für jedes x

$$\alpha a + ap \sqsubset\!\!= \alpha a + x = \text{Subtang.}$$

und

$$\alpha a = \text{Subtang.} - x$$

Weil aber hier $x = \infty$ ist, so setze man, in der allgemeinen Gleichung für Subt, $x = \infty$; hiermit erhält man für αa einen bestimmten Werth.

Die unendlich entfernte Ordinate p q sey $= Y$, so ist

$$Y : \text{Subt.} = a\beta : a\alpha$$

also

$$a\beta = \frac{Y}{\text{Subt.}} \cdot a\alpha$$

Aus der gegebenen Gleichung zwischen x und y substituirt man die allgemeinen Werthe von Y und Subt. (wobei man überhaupt Y statt y schreibt), so erhält man für $\frac{Y}{\text{Subt.}}$ folglich auch für $a\beta$ einen bestimmten Werth. Durch die Punkte α und β ist aber die Asymptote αq bestimmt.

Analysis des Unendlichen.

II. Integralrechnung.

§. 174.

Wir haben die Wichtigkeit der Differentialrechnung als einer selbstständigen Rechnung im vorigen Abschnitte hinlänglich kennen gelernt. Ihren wichtigsten Gebrauch hat sie aber als vorbereitende Rechnung zu der jetzt folgenden Integralrechnung, welche uns lehrt, wie sich aus Differentialverhältnissen veränderlicher Größen Gleichungen zwischen diesen veränderlichen Größen selbst ableiten lassen. Eine solche abgeleitete Gleichung heißt in Bezug auf die zum Grunde liegende Differentialgleichung eine Integralgleichung. Der Ausdruck, welchen man differentiiren müßte, um einen gegebenen Differentialausdruck zu erhalten, heißt das Integral des gegebenen Differentialausdrucks. Das Zeichen, welches andeuten soll, daß das Integral eines Differentialausdrucks gemeint sey, ist $\int$. Z. B. der Satz, das Integral des Differentialausdrucks $2xdx$ sey x^2, wird so ausgedruckt:

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

So auch

$$\int (3x^2\,dx + \frac{dy}{y}) = x^3 + \log n.\ y + C$$

wo C eine unveränderliche Größe bezeichnet, die noch hinzukommen kann.

Einen Differentialausdruck integriren heißt sein Integral angeben.

Es seyen x und y von einander abhängige veränderliche Größen, Y eine Funktion von y, (fx) eine Funktion von x; wäre man nun auf die Differentialgleichung

$$dY = (fx) . dx$$

gekommen, und wüßte man eine Funktion $\mathfrak{X}$ von x, die so beschaffen wäre, daß

$$d\mathfrak{X} = (fx) . dx$$

wäre, so hätte man

$$dY = d\mathfrak{X}$$

also die Integralgleichung

$$Y = \mathfrak{X} + C$$

Hiermit wäre also aus der ursprünglichen Differentialgleichung $dY = (fx) . dx$ eine Gleichung zwischen Funktionen von x und y gefunden, welches der Zweck der Integralrechnung ist, die als das eigentliche Orakel der Mathematiker angesehen werden kann; ohne ihre Berathung stehen der Beantwortung unzähliger wichtiger Fragen unauflösliche Schwierigkeiten im Wege, und wo auch sie keine Antwort ertheilt, darf man alle Hoffnung aufgeben, durch irgend einen Kalkul seinen Zweck zu erreichen. Ihre Erfindung war dringendes Bedürfniß.

§. 175.

Ich habe im vorstehenden §. gesagt:

Wenn $dY = (fx) . dx$

und $d\mathfrak{X} = (fx) . dx$ ist,

so daß in beiden Gleichungen (fx) einerlei Funktion von x bezeichnet, daß also

$$dY = dX \text{ ist,}$$

so hat man auch

$$Y = X + C$$

Von der Richtigkeit dieses Satzes, auf der zugleich die Richtigkeit aller Resultaten der Integralrechnung beruht, kann man sich leicht überzeugen. Wenn nämlich (fx) bestimmte Form einer Funktion von x ist, so giebt es auch nur eine einzige bestimmte Funktion X, für welche $dX = (fx)\,dx$ wird; denn wir haben am Anfange der Differentialrechnung gesehen, daß für jede andere Form von X auch $\frac{dX}{dx}$ folglich (fx) eine andere Form annimmt. Es giebt demnach außer der Form X nicht auch noch eine andere von X verschiedene Y, für welche $\frac{dY}{dx}$ gleichfalls dieselbe bestimmte Form (fx) gäbe; vielmehr folgt aus der völligen Uebereinstimmung, die für alle mögliche Werthe von x zwischen den beiden Quotienten $\frac{dX}{dx}$ und $\frac{dY}{dx}$ statt hat, daß ohne Rücksicht auf die unveränderlichen Glieder nothwendig $Y = X$ seyn müsse, folglich, weil dY mit $d(Y + c)$ und dX mit $d(X + C)$ einerlei ist,

$$Y + c = X + C, \text{ und } Y = X + C - c$$

Weil aber $C - c$ als Differenz unveränderlicher Größen selbst eine unveränderliche Größe seyn muß, die wir allgemein durch C ausdrucken können, so hat man auch schlechthin

$$Y = X + C \text{ (b}$$

§. 176.

Die unveränderliche Grösse C giebt sich jedesmal aus Betrachtung des Objekts oder der Bedingung, worauf sich die Gleichung $Y = X + C$ bezieht, auf eine gewöhnlich so einfache Weise, daß man dazu kaum mathematischer Kenntnisse bedarf. Man darf nämlich, ohne alle Rücksicht auf die vorstehende Integralgleichung, nur aus der Natur des Objekts, von welchem die Rede ist, oder aus den Bedingungen der Aufgabe irgend einen bestimmten Werth von x suchen, für welchen man schon zum voraus den zugehörigen Werth von Y kennt. Diesen Werth setzt man (im vorigen §. h) statt Y; auch setzt man statt X denjenigen Werth, in welchen sich X verwandelt, wenn jener Werth von x in der Funktion X statt x substituirt wird. Auf solche Weise wird $Y = X + C$ in eine bestimmte Gleichung für C verwandelt, und man erhält

$$C = Y - X$$

Weiß man z. B. daß für $x = o$ die Größe $Y = A$ werden muß, und verwandelt sich die Funktion X, wenn man in ihr $x = o$ setzt, z. B. in $b - 2m\sqrt{k}$, so erhält man

$$A = b - 2m\sqrt{k} + C$$

also

$$C = A - b + 2m\sqrt{k}$$

Weil nun C als unveränderliche von x ganz unabhängige Größe immer denselben Werth behalten muß, was auch x für einen Werth haben mag, so hat man auf solche Weise den Werth von C für alle Werthe von x gefunden, und man hat nunmehr die vollständige Integralgleichung

$$Y = X + A - b + 2m\sqrt{k}$$

Wir behalten in den nachfolgenden Integralformeln überall den Buchstaben C bei, weil wir keine Größen be-

stimmter Art vor Augen haben, aus deren Beschaffenheit wir bestimmte Werthe von C ableiten könnten. Beispiele in Menge giebt uns die höhere Geometrie und die höhere Mechanik.

§. 177.

Hiernach hat man nun unmittelbar aus den vorgetragenen Lehren der Differentialrechnung

CV. $\int dx = x + C$

CVI. $\int a\,dx = ax + C$

CVII. $\int (a\,dx + b\,dy) = ax + by + C$

CVIII. $\int (x\,dy + y\,dx) = xy + C$

CIX. $\int m x^{m-1} dx = x^m + C$

CX. $\int a x^n dx = \int \frac{a}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n dx$

$$= \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

CXI. $\int \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{x}{y} + C$

CXII. $\int \frac{a\,dy}{y^2} = -\frac{a}{y} + C$

CXIII. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

CXIV. $\int \frac{dx}{n\sqrt[n]{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{n}$

CXV. $\int \frac{dx}{x} = \log n.\ x + C$ *)

§. 178.

Aus CXV, einer sehr fruchtbaren Integralgleichung, lassen sich mannichfaltige mehr zusammengesetzte ableiten. Sie giebt

CXVI. $$\int \frac{a\,dx}{b + x} = a \cdot \int \frac{d\,(b + x)}{b + x}$$
$$= a \cdot \log n.\ (b + x) + C$$

Auch hat man

$$\frac{a\,dx}{b + mx} = \frac{\frac{a}{m} \cdot dx}{\frac{b}{m} + x}$$
$$= \frac{\frac{a}{m} \cdot d\left(\frac{b}{m} + x\right)}{\frac{b}{m} + x}$$

Daher

CXVII. $$\int \frac{a\,dx}{b + mx} = \frac{a}{m} \cdot \log n. \left(\frac{b}{m} + x\right) + C$$

Setzt man in CXV statt x irgend eine Funktion einer veränderlichen Größe, und macht zuerst statt dx das Differential dieser Funktion, die wir mit Y bezeichnen wollen,

---

*) Da ich von Jedem, der diese Schrift bis hierhin mit Aufmerksamkeit studirt hat, erwarten muß, daß er mit der in der Analysis endlicher Größe vorgetragenen Entwickelung der Gleichungen umzugehen wisse, so werde ich mich auch in der Folge bei solchen Entwickelungen nicht aufhalten.

so erhält man $\int \frac{dY}{Y} = \log n.\ Y + C$. Setzen wir

z. B. $\frac{y}{\sqrt{(m - ny^2)}}$ statt x, so finden wir nach gehöriger Reduktion

$$dx = \frac{m\,dy}{(m - ny^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Demnach

$$\frac{dx}{x} = \frac{\left(\frac{m\,dy}{(m - ny^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\left(\frac{y}{\sqrt{(m - ny^2)}}\right)}$$

$$= \frac{m\,dy}{y.\,(m - ny^2)}$$

Also

$$\int \frac{m\,dy}{y.\,(m - ny^2)} = \log n.\ \frac{y}{\sqrt{(m - ny^2)}} + C$$

(nämlich $= \log n.\ x + C$)

Nun ist

$$\frac{q\,dy}{y.\,(m - ny^2)} = \frac{q}{m} \cdot \frac{m\,dy}{y.\,(m - ny^2)}$$

also

CXVIII. $\int \frac{q\,dy}{y.\,(m - ny^2)} = \frac{q}{m} \cdot \log n.\ \frac{y}{\sqrt{(m - ny^2)}} + C$

$$= \frac{q}{m}.\left(\log n.\ y - \tfrac{1}{2} \ln.\,(m - ny^2)\right) + C.$$

Setzen wir hier aufs Neue $\sqrt{y^r}$ statt y, so erhalten wir $\frac{r y^{r-1}\,dy}{2\sqrt{y^r}}$ statt dy; und $\left(\frac{r y^{r-1}\,dy}{2\sqrt{y^r}}\right)$ statt $\frac{dy}{y}$, oder

$$\frac{r\,dy}{2\sqrt{y^r}}$$

$\frac{1}{2}r \cdot \frac{dy}{y}$ statt $\frac{dy}{y}$; demnach statt CXVIII

$$\int \frac{q \cdot \frac{1}{2} r\, dy}{y \cdot (m - n y^r)} = \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{2} r \cdot (\log n. \sqrt{y^r} - \frac{1}{2} \log n. (m - n y^r)) + C$$

oder

CXIX. $$\int \frac{q\, dy}{y \cdot (m - n y^r)} =$$

$$\frac{q}{m} \cdot \frac{1}{2} r \cdot \left(\ln. y - \frac{\ln. (m - n y^r)}{r} \right) + C$$

Unter dieser Formel sind also alle folgende

$$\int \frac{q\, dx}{mx - nx^2}; \int \frac{q\, dx}{mx - nx^3}; \int \frac{q\, dx}{mx - nx^4} \text{ etc.}$$

begriffen.

Ist $y = \text{Sin. } \alpha$, so hat man $\text{Cos. } \alpha^2 = 1 - y^2$,

also $$\frac{dy}{y - y^3} = \frac{dy}{y \cdot (1 - y^2)} = \frac{d\ \text{Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \alpha},$$

daher, indem man (CXIX) $q = 1$, $m = n = 1$, x^2 und $y = \text{Sin. } \alpha$ setzt

$$\int \frac{d\ \text{Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \alpha^2} = \text{ln. Sin. } \alpha - \frac{\ln. (1 - \text{Sin. } \alpha^2)}{2} + C$$

$$= \log n. \frac{\text{Sin. } \alpha}{\sqrt{(1 - \text{Sin. } \alpha^2)}}$$

oder

CXX. $$\int \frac{d\ \text{Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \alpha^2} = \log n. \text{ tang. } \alpha$$

§. 179.

Zu den logarithmischen Integralien gehört auch die Gleichung

$$d\mathfrak{x} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2mx)}}$$

Um zur Integralgleichung zu gelangen, setze man $\sqrt{(2mx + x^2)} = x + z$, so hat man

$$x = \frac{z^2}{2(m-z)}$$

$$x + z = \frac{z^2 + 2z.(m-z)}{2(m-z)} = \frac{2mz - z^2}{2.(m-z)}$$

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{d\left(\frac{z^2}{2(m-z)}\right)}{\left(\frac{2mz - z^2}{2(m-z)}\right)}$$

Substituirt man zur Rechten den Werth von $d\frac{z^2}{2(m-z)}$ so erhält man

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{2(m-z).2z + 2z^2}{2(m-z).(2mz - z^2)}.dz$$

$$= \frac{2mz - z^2}{2mz - z^2} \cdot \frac{dz}{m-z} = -\frac{d(m-z)}{m-z}$$

also auch

$$\frac{dx}{\sqrt{(2mx + x^2)}} = -\frac{d(m-z)}{m-z} = -\frac{d(z-m)}{z-m}$$

Aber $z = -x + \sqrt{(2mx + x^2)}$, also

$$\frac{dx}{\sqrt{(2mx + x^2)}} = -\frac{d(-m-x+\sqrt{(2mx+x^2)})}{-m-x+\sqrt{(2mx+x^2)}}$$

und

CXXI. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(2mx+x^2}} = -\ln.(-(m+x)+\sqrt{(2mx+x^2)}) + C.$$

In solchen Fällen, wo das Integral außer der Konstante logarithmisch ist, ist es am bequemsten, auch die Kon=

stante logarithmisch auszudrucken. Setzt man nun hier logn. C statt C, so wird

CXXII. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2mx+x^2}} = \ln. \frac{C}{\sqrt{(2mx+x^2)}-(m+x)}$

Wüßte man z. B. daß in einem besonderen Falle für $x = o$ auch $X = o$ werden müßte, so hätte man, $x = o$ gesetzt, zur Linken dieser Gleichung o, und zur Rechten ln. $\frac{C}{o-m}$ oder $-\ln. \frac{C}{m}$, also

$$o = -\text{logn.} \frac{C}{m}, \text{ daher } \frac{C}{m} = 1 \text{ und } C = m$$

Demnach in solchem Falle

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2mx+x^2)}} = \text{logn.} \frac{m}{\sqrt{(2mx+x^2)}-(m+x)}$$

§. 180.

Auch die Gleichung

$$dX = \frac{dx}{a-bx^2}$$

führt auf ein logarithmisches Integral. Man setze

$$\frac{1}{a-bx^2} = \frac{1}{\alpha+\beta x} + \frac{1}{\alpha-\beta x}$$

und bringe beide Brüche zur Rechten unter einerlei Benennung, so wird

$$\frac{1}{a-bx^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\alpha - \frac{\beta^2}{2\alpha}\cdot x^2}$$

Man kann also $\frac{1}{2}\alpha = a$, und $\frac{\beta^2}{2\alpha} = b$ setzen. Dieses giebt

$$\alpha = 2a; \quad \beta = \sqrt{2\alpha b} = 2\sqrt{ab}$$

also $\frac{1}{a - bx^2} =$

$$\frac{1}{2a + (2\sqrt{ab}).\,x} + \frac{1}{2a - (2\sqrt{ab}).\,x}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{ab}}\right)}{\sqrt{\frac{a}{b}} + x} - \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{ab}}\right)}{-\sqrt{\frac{a}{b}} + x}$$

Folglich

$$\frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \times \left\{ \frac{d\left(x + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{x + \sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{d\left(x - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{x - \sqrt{\frac{a}{b}}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \times \left\{ \frac{d\left(x + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{\sqrt{\frac{a}{b}} + x} - \frac{d\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - x\right)}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} \right\}$$

Daher CXXIII. $\int \frac{dx}{a - bx^2} =$

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} . \log n. \left\{ \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} \right\} + C$$

§. 181.

Es sey

$$\frac{dz}{\text{logn. } z} dx = \frac{dz}{\text{logn. } z}$$

so ist

$$\frac{dz}{\text{logn. } z} = \frac{z \cdot \left(\frac{dz}{z}\right)}{\text{ln. } z} = \frac{z \cdot d \text{ logn. } z}{\text{logn. } z}$$

oder, wenn wir $z = e^x$ setzen, wo logn. $e = 1$ ist,

$$\frac{dz}{\text{logn. } z} = \frac{e^x \cdot dx}{x}$$

Aber (§. 100.), x statt α gesetzt,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

also $\frac{dz}{\text{logn. } z} =$

$$\frac{dx}{x} + dx + \frac{x}{1} dx + \frac{x^2}{2 \cdot 3} dx + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} dx + \text{etc.}$$

und

$$\int \frac{dz}{\text{logn. } z} = \text{logn. } x + x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.} + C$$

oder

CXXIV. $$\int \frac{dz}{\text{logn. } z} = \text{logn. } (\text{ln. } z) + \text{ln. } z + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(\text{ln. } z)^2}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(\text{ln. } z)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(\text{ln. } z)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.} + C$$

Eben diese Integration giebt sich auch so:

$$\int \frac{dz}{\ln. z} = \int^{z} \frac{\left(\frac{dz}{z}\right)}{\ln. z} \left\{ \begin{array}{l} \text{Aber } z = 1 + \ln. z + \frac{(\ln. z)^2}{2} \\ \qquad + \frac{(\ln. z)^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.} \\ \text{also} \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{z}{\ln. z} . d \ln. z \left\{ \begin{array}{l} \frac{z}{\ln. z} = \frac{1}{\ln. z} + 1 + \frac{l. z}{2} \\ \qquad + \frac{(l. z)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(l. z)^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Demnach

$$\int \frac{dz}{\text{logn. } z} = \int \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \ln. z}{\ln. z} + d (l. z) + \frac{l. z}{2} . d (l. z) \\ \qquad + \frac{(l. z)^2}{2 \cdot 3} d (l. z) + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

$$= \text{ln. } (l. z) + l. z + \tfrac{1}{2} . \frac{(l. z)^2}{2} + \tfrac{1}{3} \frac{(l. z)^3}{2 \cdot 3} \ldots\ldots + C$$

Käme uns also eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dz}{dx} = \text{logn. } z$$

vor, so ergäbe sich zwischen x und z nunmehr sogleich eine Integralgleichung. Wir hätten nämlich auch

$$dx = \frac{dz}{\text{logn. } z}$$

also

$$x = \text{logn. } (l. z) + l. z + \tfrac{1}{2} . \frac{(l. z)^2}{2} + \tfrac{1}{3} . \frac{(l. z)^3}{2 \cdot 3} \ldots\ldots + C$$

§. 182.

Es sey

$$d \mathfrak{X} = \text{logn. } z . dz \text{ *)}$$

*) Ich bin nie in den Fall gekommen, von der vorhergehenden Integrirung Gebrauch zu machen. Die hier folgende ist mir

Man setze $z = e^x$, so ist logn. $z = x$ und $dz = \frac{z\,dz}{z} =$ z, d logn. z, also logn. $z . dz = x . z .$ d logn. z $= xe^x\,dx$

$$= x\,dx + x^2\,d.x + \frac{x^3}{2} . dx + \frac{x^4}{2.3} . dx + \text{etc.}$$

und $\int$ oder

$$\int \text{logn. } z . dz = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4.2} + \frac{x^5}{5.2.3} + \frac{x^6}{6.2.3.4} + \text{etc.} + C.$$

also

CXXV. $\int \text{logn. } z\,dz = \frac{1}{2}(\ln. z)^2 + \frac{1}{3} . \frac{(\ln. z)^3}{1} + \frac{1}{4} . \frac{(\ln. z)^4}{1.2} + \frac{1}{5} \frac{(\ln. z)^5}{1.2.3} + \text{etc.} + C$

§. 183.

Zuweilen werden Differentialgleichungen durch eine kleine Umänderung ihrer Form so gestaltet, daß sie sich alsdann sehr leicht integriren lassen. Z. B.

$$a\,dx = y\,dy - x\,dy$$

Die Reduktion dieser Gleichung auf die Integralgleichung könnte einen Anfänger in große Verlegenheit setzen. Es wird aber alle Schwierigkeit gehoben, wenn man auf beiden Seiten $a\,dy$ abzieht. Hiermit erhält man

$$\frac{a\,(dx - dy)}{y - x - a} = dy$$

oder

---

aber einmal bei Beantwortung einer mechanischen Frage vorgekommen.

$$\frac{a \cdot d(y - x - a)}{y - x - a} = -dy$$

also

CXXVI. $-y = a \cdot \log n. (y - x - a) + C$

oder auch

$$y = C - a \cdot \ln. (y - x - a)$$

Man könnte aber auch a . ln. C statt C schreiben, dieses gäbe

CXXVII. $y = a \cdot \log n. \frac{C}{y - x - a}$

§. 184.

Es sey

CXXVIII. $dx = \frac{a + bx}{m\sqrt{(h - x)} - n} \cdot dx$

so setze man $a + bx = z$, $\frac{1}{m} = \alpha$, so wird

1) $dx = \frac{\alpha z\, dx}{\sqrt{(h - x)} - \alpha n}$

Den Nenner setze man $= y$, so wird

2) $dx = \frac{\alpha z\, dx}{y}$

wo also $y = \sqrt{(h - x)} - \alpha n$ ist; diese Gleichung für y giebt

3) $x = h - y^2 - 2\alpha n y - \alpha^2 n^2$

also

$$dx = -2y\,dy - 2\alpha n\,dy$$

Diesen Werth statt dx (No. 1.) gebraucht, giebt

4) $dx = -\left(2\alpha\,dy + \frac{2n\alpha^2\,dy}{y}\right) \cdot z$

Es ist aber $z = a + bx$ oder (No. 3.)

$= a + bh - by^2 - 2\alpha n b y - \alpha^2 n^2 b$

Diesen Werth statt z in (No. 4.) gesetzt, giebt eine Gleichung, deren Glieder sich sehr leicht integriren lassen.

§. 185.

Daß man durch Differentiirung willkührlich angenommener Ausdrücke auf Differentialausdrücke kommen kann, die uns öfters vorkommen und deren Integralien wir alsdann schon wissen, ist oben schon als Mittel angegeben worden, zu manchen Integrirungen zu gelangen. Machen wir z. B. das Differential von $(2Bx + x^2)^{\frac{1}{2}}$, so findet man

$$\frac{(B + x) . dx}{(2Bx + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Kommt man also auf eine Differentialgleichung von der Form

$$dx = \frac{(B + x) . dx}{(2Bx + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

so hat man sogleich die Integralgleichung

CXXIX. $x = \sqrt{(2Bx + x^2)}$

§. 186.

Es sey

$$dx = \frac{mxdx}{\sqrt{(ax^2 + c)}}$$

so setze man $\sqrt{(ax^2 + c)} = y$, also $ax^2 + c = y^2$;

dieses giebt $2axdx = 2ydy$, also $xdx = \frac{ydy}{a}$;

also

$$\frac{mxdx}{\sqrt{(ax^2 + c)}} = \frac{m . \frac{ydy}{a}}{y} = \frac{mdy}{a}$$

und

$$\int \frac{m\,x\,dx}{\sqrt{(a\,x^2 + c)}} = \int \frac{m\,dy}{a} = \frac{my}{a} + C$$

oder

CXXX. $$\int \frac{m\,x\,dx}{\sqrt{(a\,x^2 + c)}} = \frac{m\sqrt{(a\,x^2 + c)}}{a} + C$$

§. 187.

Es sey

CXXXI. $dX = x^m \cdot (a + b\,x^n)^p \cdot dx$

man soll die Integralgleichung finden.

I. Entwickelt man $(a + b\,x^n)^p$ nach dem binomischen Lehrsatze und multiplicirt dann mit $x^m\,dx$, so erhält man

$$dX = a^p x^m\,dx + p\,a^{p-1}\,b\,x^{m+n}\,dx + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2} \cdot a^{p-2} b^2 x^{m+2n}\,dx + \text{etc.}$$

woraus sich X sehr leicht durch eine Reihe ergiebt. Ist p eine ganze Zahl, so muß diese Reihe nothwendig irgendwo abbrechen.

II. Es giebt aber auch Fälle, wo das Integral durch eine bestimmte Anzahl von Gliedern ausgedruckt werden kann, wenn gleich p keine ganze Zahl ist. Hierzu dient folgendes:

1) Man setze $a + b\,x^n = z$, also $n\,b\,x^{n-1}\,dx =$

dz und $x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $x^{n-1} = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}$

und

$$dz = n\,b \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot dx$$

oder

$$dx = \frac{dz}{n b \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{dz}{nb} \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

2) Substituirt man nun in der Gleichung für dx die Werthe von x^m, $a + bx^n$ und x, so verwandelt sich das vorgegebene Differential in dieses

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot z^p \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} \cdot \frac{dz}{nb}$$

oder in

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot z^p \cdot \frac{dz}{nb} \quad (\mathfrak{h})$$

3) Wenn nun $\frac{m+1}{n}$ durch $r + 1$ ausgedruckt wird, so ist die Differentialgröße $(\mathfrak{h}) = \left(\frac{z-a}{b}\right)^r \cdot z^p \cdot \frac{dz}{nb}$

$= (z - \alpha)^r \cdot z^p \cdot \frac{1}{nb^{r+1}} \cdot dz$ oder nach dem binomischen Lehrsatze $=$

$$\frac{(z^r - r.az^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} a^2 z^{r-2} - \text{etc.}) \cdot z^p}{nb^{r+1}} \cdot dz$$

$$= \frac{z^{p+r} - raz^{p+r-1} + \frac{r.(r-1)}{1.2} \cdot a^2 z^{p+r-2} \text{etc.}}{n.b^{r+1}} \cdot dz$$

4) Jedes Glied dieses Ausdrucks läßt sich nun leicht integriren. Ist r eine ganze bejahte Zahl oder $= 0$, so

besteht die Potenz $(z - a)^r$ oder die vorstehende Reihe aus $r + 1$ Gliedern.

Ist aber r ein Bruch oder verneint, so enthält die Reihe eine unerreichbare Menge von Gliedern, und man erhält das Integral nur näherungsweise, wofern sie konvergirt.

5. Wenn $\frac{m+1}{n} - 1 = 0$ wird, so verwandelt sich

$\int$ in $\frac{z^p \cdot dz}{nb}$, und dieses integrirt giebt

$$\frac{z^{p+1}}{nb(p+1)} \text{ oder } \frac{(a + bx^n)^{p+1}}{nb.(p+1)} \text{ *)}$$

6) Soll z. B. $\int \frac{\beta dx}{x \sqrt{(ax + x^2)}}$ integrirt werden, so ist

$$x\sqrt{(ax + x^2)} = x^2 \sqrt{\left(\frac{a}{x} + 1\right)} = x^2.(1 + ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

also

$$\int \frac{\beta dx}{x.\sqrt{(ax + x^2)}} = \int \frac{\beta dx}{x^2.(1 + ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$$
$$= \int \beta x^{-2}.(1 + ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}.dx$$

und nun

*) Für $p = -1$ gäbe dieser Ausdruck nichts bestimmtes. Dann hat man aber $\int \frac{z^p \cdot dz}{nb} = \int \frac{1}{nb} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\text{lognat. } z}{nb} =$ $\frac{\text{logn. } (a + bx^n)}{nb}$.

$$\int \frac{\beta\, dx}{x\sqrt{(ax + x^2)}} = \beta . \int x^{-2} . (1 + ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

Diesen Ausdruck mit $x^m . (a + bx^n)^p . dx$ verglichen, giebt

	m	a	n	p	b
für					
hier	-2	1	-1	$-\frac{1}{2}$	a

also $\frac{m+1}{n} - 1$ hier $= 0$, und daher das Integral, ohne den Faktor β, nach No. 5.

$$= \frac{(a + bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)} = \frac{(1 + ax^{-1})^{-\frac{1}{2}+1}}{-1 . a . (-\frac{1}{2} + 1)}$$

$$= -\frac{2\sqrt{(ax + x^2)}}{ax}$$

Dieses noch mit β multiplicirt, giebt

$$\int \frac{\beta\, dx}{x\sqrt{(ax + x^2)}} = -\frac{2\beta\sqrt{(ax + x^2)}}{ax} \text{ *)}$$

---

*) So begreift die allgemeine Gleichung für dx eine Menge besonderer Differentialausdrücke unter sich, die oft beim ersten Anblicke eine ganz andere Form zu haben scheinen. Sollte z. B. $\frac{x^m\, dx}{a - x^n}$ integrirt werden, so wäre

	x	a	b	p	n	m
dort	x	a	-1	-1	n	m
hier	x	a				

Sollte $\frac{x\, dx}{a - bx^2}$ integrirt werden, so wäre

	x	a	b	p	n	m
dort	x	a	$-b$	-1	2	1
hier	x	a				

also in diesem Falle nach der vorigen Note das Integral $= -\frac{\log n . (a - bx)}{2b}$. So erhält man hiernach auch z. B.

§. 188.

Aus (§. 133.) erhält man unmittelbar die höchstwichtigen Integralformeln

CXXXII. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Sin. } x + C$

CXXXIII. $\int -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Cos. } x + C$

CXXXIV. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc. tang. } x + C$

CXXXV. $\int -\frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc. Cot. } x + C$

CXXXVI. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \text{Arc. Sec. } x + C$

CXXXVII. $\int -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \text{Arc. Cosec. } x + C$

§. 189.

Der Differentialausdruck

$$\frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot dx$$

ist zwar unter der allgemeinen Form (CXXXI) mitbegriffen, es ist aber oft vortheilhaft, einen gegebenen Differen-

---

das Integral von $\frac{(\alpha+\beta x)^3}{m+nx} \cdot dx$, welches durch

$$\int \left\{ \frac{\alpha^3 dx}{m+nx} + \frac{3\alpha^2\beta x\, dx}{m+nx} + \frac{3\alpha\beta^2 x^2 dx}{m+nx} + \frac{\beta^3 x^3 dx}{m+nx} \right\}$$

ausgedruckt werden kann. Die Summe dieser 4 Integralien ist das gesuchte Integral.

tialausdruck in zwei andere zu zerlegen, welches auch bei dem vorstehenden Differential auf folgende Weise geschehen kann.

Es ist $\frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \left(\frac{1}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) \cdot \frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot dx$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot dx + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot dx$$

Schreibt man im 2ten Gliede $\frac{m-1}{m}$ statt $1 - \frac{1}{m}$, und $x^2 \cdot x^{m-2}$ statt x^m, so erhält man

$$\frac{\frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot dx + \frac{x^2 \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}}{m}$$

$$= \frac{x^m \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{m} + \frac{x^2 \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} dx}{m\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= \frac{x^{m-1} \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx}{m} + \frac{x^2 \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} dx}{m\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\frac{x^{m-1} \cdot d(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx^{m-1}}{m} \cdot \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$= -\frac{x^{m-1} \cdot d(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx^{m-1}}{m} \cdot \frac{1-(1-x^2)}{1-x^2}$$

$$= -\frac{x^{m-1} \cdot d(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m} - \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx^{m-1}}{m}$$

$$+ \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx^{m-1}}{m \cdot (1-x^2)}$$

$$= -\frac{d\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{m-1}\right) + (m-1)\cdot\frac{x^{m-2}\,dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{m}$$

Demnach CXXXVIII.

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{m-1}\cdot\sqrt{(1-x^2)}}{m} + \frac{m-1}{m}\cdot\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Diese überaus nützliche Formel giebt das Integral in einzelnen Fällen für bestimmte Werthe von m und für $x = 1$ sehr leicht, vorausgesetzt, daß das Integral für $x = 0$ verschwinden solle.

Für $m = 0$ ist CXXXVIII nicht anwendbar; es verwandelt sich aber für diesen Fall $\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in den $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und nun hat man (aus CXXXII)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Sin. } x$$

welches für $x = 0$ verschwindet, und für $x = 1 =$ dem Quadranten $= \frac{1}{2}\pi$ wird.

Für $m = 1$ verwandelt sich CXXXVIII in

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{1} + C$$

Weil nun das Integral für $x = 0$ verschwinden soll, so muß $-1 + \text{Const} = 0$ seyn, also $\text{Const} = 1$, und nun, für $x = 1$,

CXXXIX. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 - \sqrt{(1-1)} = 1$$

Nunmehr lassen sich für $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$ u. s. f. die zugehörigen Integralien (CXXXVIII) leicht angeben, so daß sie alle eine sehr einfache Form erhalten. Setzt man nämlich in dortigem Integral nach schon geschehener Integrirung $x = 1$, so bleibt

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{m-1}{m} \cdot \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Daher, für $m = 2$,

CXL. $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi.$$

Und nun, für $m = 3$,

CXLI. $$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3} \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3}.$$

Für $m = 4$

CXLII. $$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{3}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \pi$$

Für $m = 5$

CXLIII. $$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{4}{5} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

Für $m = 6$

CXLIV. $$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{5}{6} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \pi$$

Für $m = 7$

CXLV. $$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{6}{7} \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$$

u. s. f.

So erhält man überhaupt, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, also $m = 2n$ allemal eine gerade und $m = 2n + 1$ eine ungerade Zahl ausdruckt,

CXLVI. $$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5.7.9.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8.10.\ldots.2n} \cdot \frac{1}{2} \pi$$

CXLVII. $\int \frac{x^{2n+1} \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6.8.10.... 2n}{3.5.7.9.11...(2n+1)}$

vorausgesetzt, daß derjenige Werth des Integrals verlangt werde, welcher zu $x = 1$ gehört, und daß für $x = 0$ das Integral verschwinde.

§. 190.

Nunmehr erhält man auch einen allgemeinen Ausdruck für das Integral von

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{(x-x^2)}}$$

für die Voraussetzung am Ende des vorigen §.
Es sey nämlich $x = z^2$, so wird

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{z^{2m} \cdot 2z dz}{z \cdot \sqrt{(1-z^2)}} = \frac{2 \cdot z^{2m} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} \quad (\flat)$$

Setzt man nun in (CXLVI) z statt x, m statt n, so erhält man

$$\int \frac{z^{2m} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1.3.5.7.9.....(2m-1)}{2.4.6.8.10.....2m} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

Dieses noch mit 2 multiplicirt giebt $\int \frac{2z^{2m} dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, also

CXLVIII. $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1.3.5.7.9.....(2m-1)}{2.4.6.8.10....2m} \cdot \pi$$

Für $m = 0$ verliehrt diese Form ihre Anwendbarkeit; dann hat man aber aus $(\flat)$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = 2 \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = 2 \text{ Arc. Sin. } z$$
$$= 2 \text{ Arc. Sin. } \sqrt{x} \text{ (CXXXII.)}$$

Wird also das Integral für $x = 1$ verlangt, so hat man

CXLIX. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x - x^2)}} = 2 . \text{Arc. Sin. } 1 = \pi$

Anm. Man kann auch in Fälle kommen, wo das Integral von $-\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ gesucht wird, da dann

$\mathfrak{X}$ oder $\int -\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \text{Arc. Cos. } x + C$

ist (CXXXIII). Gewöhnlich verschwindet in diesem Falle das Integral, sobald $x = 1$ wird; für diesen Fall wird also, $\mathfrak{X} = 0$ gesetzt, $0 = + C$, oder $C = 0$, daher $\int -\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \text{Arc. Cos. } x$ und, für $x = 0$,

$$\mathfrak{X} = \text{Arc. Cos. } 0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

§. 191.

Die Differentialgleichung

$$d\mathfrak{X} = (\sqrt{(1 + u^2)}) . du$$

ist zwar gleichfalls unter der sehr viel umfassenden (CXXXI) schon mit begriffen; die dortige Methode giebt uns aber keinen bequemen Ausdruck für $\mathfrak{X}$.

Setzen wir $\sqrt{(1 + u^2)} = z - u$, so erhält man $u = \frac{z^2 - 1}{2z}$ und $du = \frac{(z^2 + 1) . dz}{2 . z^2}$; auch hat man

$$\sqrt{(1 + u^2)} = z - u = z - \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

also

$$d\mathfrak{X} = (z - u) . du = \frac{(z^2 + 1)^2 . dz}{4z^3}$$

$$= \tfrac{1}{4} z . dz + \tfrac{1}{2} \frac{dz}{z} + \tfrac{1}{4} \frac{dz}{z^3}$$

und

$$\mathfrak{X} = \tfrac{1}{8}\left(z + \tfrac{1}{z}\right)\cdot\left(z - \tfrac{1}{z}\right) + \tfrac{1}{2}\,\text{logn.}\,z + C$$

oder nach gehöriger Reduktion

CL. $\mathfrak{X} = \tfrac{1}{2}u\sqrt{(1+u^2)} + \tfrac{1}{2}\,\text{logn.}\,(u + \sqrt{(1+u^2)}) + C.$

§. 192.

Es sey

$$d\mathfrak{X} = (\sqrt{(1-u^2)})\,.\,du$$

Um $\mathfrak{X}$ zu finden, bringen wir den Ausdruck auf eine Kreisfunktion.

Nehmen wir aus dem Mittelpunkte c Fig. 17. die Abscisse $cd = u$ und die auf cd senkrechte $cf = 1$, so ist, wenn $md = \Delta u$ sehr klein ist,

dmne oder Δ Fläche cdef sehr nahe $= md\,.\,ed = (\sqrt{(1-u^2)})\,.\,\Delta u$, und, wenn wir Fläche cdef mit $\mathfrak{X}$ bezeichnen, in aller Schärfe $(\sqrt{(1-u^2)})\,.\,du$ das Differential dieser Fläche, also

$$\mathfrak{X} = \int(\sqrt{(1-u^2)})\,.\,du$$

Es ist aber cdef oder $\mathfrak{X} = \triangleleft\,cde + \text{Sect.}\,ecf = \tfrac{1}{2}u\,.\,\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{2}\,\text{Arc.}\,\text{Sin.}\,u$ (den Halbmesser $= 1$ gesetzt); also

CLI. $\int(\sqrt{(1-u^2)})\,.\,du = \tfrac{1}{2}u\,.\,\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{2}\,\text{Arc.}\,\text{Sin.}\,u$

§. 193.

Es sey

$$d\mathfrak{X} = \frac{dx}{\sqrt{((b-x)\,.\,(ax-x^2))}}$$

Man soll $\mathfrak{X}$ finden.

Hier ist

$$(b-x).(ax-x^2) = (b-x).x.(a-x)$$
$$= (bx-x^2).(a-x)$$
$$= b^2.\left(\frac{x}{b}-\frac{x^2}{b^2}\right).\left(1-\frac{x}{a}\right).a$$

also

$$dx = \frac{\left(\frac{dx}{b}\right)}{\left(\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right).a}\right):\sqrt{\left(\frac{x}{b}-\frac{x^2}{b^2}\right)}}$$

$$= \frac{\left(\frac{dx}{b}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{b}-\frac{x^2}{b^2}\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)}}$$

Schreibt man z statt $\frac{x}{b}$, also $\frac{bz}{a}$ statt $\frac{x}{a}$, so hat man

$$dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-z^2)}} \cdot \left(1-\frac{bz}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Druckt man den letzten Faktor nach dem binomischen Lehrsatze in einer Reihe aus, so wird

$$dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{dz}{\sqrt{(z-z^2)}} + \frac{1}{2}\frac{b}{a} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{(z-z^2)}} \right. \\ \left. + \frac{1.3.b^2}{2.4.a^2} \cdot \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(z-z^2)}} \right. \\ \left. + \frac{1.3.5.b^3}{2.4.6.a^3} \cdot \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(z-z^2)}} + \text{etc.} \right. \end{cases}$$

Die Voraussetzung, daß das Integral für $x = 0$ verschwinden, und sein Werth für $x = b$ ausgedruckt werden soll, hat zur Folge, daß eben dieses Integral auch für $\frac{x}{b}$ d. i. für $z = 0$ verschwinden müsse, und daß sein

Werth für $\frac{x}{b} = \frac{b}{b}$ oder für $z = 1$ angegeben werden muß.

Für diese Voraussetzungen darf man aber die Werthe von $\int \frac{dz}{\sqrt{(z - z^2)}}, \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(z - z^2)}}, \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(z - z^2)}}$ etc. geradezu aus (CXLVIII) nehmen, indem man für m nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 etc. setzt. Nur für $m = 0$ wird CXLIX gebraucht. Auf diese Weise erhält man

CLII. $$\mathfrak{X} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\left(1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{b^3}{a^3} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \cdot \frac{b^4}{a^4} + \text{etc.}\right\}$$

unter der Voraussetzung, daß der Werth von $\mathfrak{X}$ für $x = b$ gemeint sey, und daß für $x = 0$ auch $\mathfrak{X} = 0$ werden solle.

Anm. Für $d\mathfrak{X} = -\frac{dx}{\sqrt{(b - x).(ax - x^2)}}$ erhält man denselben Werth von $\mathfrak{X}$, nur unter der Voraussetzung, daß dieser Werth für $x = 0$ gemeint sey, und daß er für $x = b$ verschwinde.

§. 194.

Aus (CXXXIV) ergiebt sich auch geradezu die Integrirung von

$$d\mathfrak{X} = \frac{q\,dx}{a + bx^2}$$

Es ist nämlich

$$\frac{q\,dx}{a + bx^2} = \frac{\frac{q}{a} \cdot dx}{1 + \frac{b}{a}x^2}$$

Setzt man nun $\frac{b}{a} x^2 = v^2$, so wird $x = v \sqrt{\frac{a}{b}}$, also

$dx = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) . dv$, und

$$\frac{q\,dx}{a + bx^2} = \frac{\frac{q}{a} . \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) . dv}{1 + v^2}$$

also

CLIII. $\int x = \frac{q}{\sqrt{ab}} . \int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{q}{\sqrt{ab}}$. Arc. tang. $v + C$

$= \frac{q}{\sqrt{ab}}$. Arc. tang. $x \sqrt{\frac{b}{a}} + C$

d. i. $\frac{q}{\sqrt{ab}}$ mit dem Bogen multiplicirt, dessen Tangente $= x . \sqrt{\frac{a}{b}}$ ist.

§. 195.

Hieraus folgt auch

$$\int \frac{x^2\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{b} . \frac{bx^2\,dx}{a + bx^2}$$

$$= \frac{1}{b} . \int \frac{(a+bx^2) . dx - a\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{b} \int \left(dx - \frac{a\,dx}{a+bx^2}\right)$$

also

CLIV. $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) . \text{Arc. tg. } x \sqrt{\frac{b}{a}}}{b} + C.$

§. 196.

Es sey

$$dx = \frac{p . d\alpha}{1 + n . (\text{Sin. } \alpha)^2}$$

so ist auch

$$dx = \frac{p \cdot d\alpha}{\text{Cos. } \alpha^2 + (1 + n) \cdot \text{Sin. } \alpha^2} \quad *)$$

und, indem wir im Zähler und Nenner mit Sec. α^2 multipliciren,

$$dx = \frac{p \cdot \text{Sec. } \alpha^2 \cdot d\alpha}{\text{Cos. } \alpha^2 \cdot \text{Sec. } \alpha^2 + (1 + n) \cdot \text{Sin. } \alpha^2 \cdot \text{Sec. } \alpha^2}$$

Es kommt nun darauf an, ob sich dieser Ausdruck auf die Form (CLIII) $\frac{q\,dx}{a + bx^2}$ bringen lasse. Hierzu dient uns die Erinnerung an folgende trigonometrische Funktionen

$$\text{Cos. } \alpha^2 \cdot \text{Sec. } \alpha^2 = 1$$

$$\text{Sin. } \alpha^2 \cdot \text{Sec. } \alpha^2 = \text{tang. } \alpha^2$$

und $$\text{Sec. } \alpha^2 \cdot d\alpha = d \text{ tang. } \alpha$$

Es ist aber wohl zu bemerken, daß die Erinnerung an solche Funktionen schon vorhergehen mußte, indem solche nur auf den Gedanken leiten konnte, vorhin im Zähler und Nenner mit Sec. α^2 zu multipliciren.

Hiermit erhält man nun

$$dx = \frac{p \cdot d \text{ tang. } \alpha}{1 + (1 + n) \cdot \text{tang. } \alpha^2}$$

Vergleichen wir dieses mit $\frac{q\,dx}{a + bx^2}$, so wird

p statt $\frac{q}{a}$ in CLIII

tang. α x

---

*) Das wichtigste Hülfsmittel zur Integrirung vorkommender Differentialausdrücke ist ihre Reduktion auf solche Formen, deren Integrirung wir schon kennen. Dabei wird hinlängliche Bekantschaft mit trigonometrischen Funktionen vorausgesetzt, deren Anwendung versucht werden muß.

$1 + n$ statt $\frac{b}{a}$

gesetzt. Man erhält daher auch hier $\frac{P}{\sqrt{(1+n)}}$ statt des dortigen $\frac{q}{a} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$ oder $\frac{q}{\sqrt{ab}}$, also

CLV. $\mathfrak{X} = \frac{P}{\sqrt{(1+n)}} \cdot \text{Arc. Tang. } (\text{tg. } \alpha \cdot \sqrt{(1+n)}) + C$

§. 197.

Weil $d\alpha = \frac{d \text{ Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha} = \frac{d \text{ Sin. } \alpha}{\sqrt{(1 - \text{Sin. } \alpha^2)}}$ ist, so läßt sich der vorige Satz auch so schreiben

$$\int \frac{p \cdot d \text{ Sin. } \alpha}{(1 + n \cdot \text{Sin. } \alpha^2) \cdot \sqrt{(1 - \text{Sin. } \alpha^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(1+n)}} \times \text{Arc. Tang. } (\text{tg. } \alpha \sqrt{(1+n)})$$

$$= \frac{p}{\sqrt{(1+n)}} \cdot \text{Arc. Tang. } \left(\frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha} \cdot \sqrt{(1+n)} \right)$$

$$= \frac{p}{\sqrt{(1+n)}} \cdot \text{Arc. Tg. } \left(\frac{\text{Sin. } \alpha}{\sqrt{(1 - \text{Sin. } \alpha^2}} \cdot \sqrt{(1+n)} \right)$$

Setzt man nun z statt Sin. α, so erhält man

CLVI. $\int \frac{p\,dz}{(1+nz^2) \cdot \sqrt{(1-z^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(1+n)}} \cdot \text{Arc. Tg. } \left(\frac{z}{\sqrt{(1-z^2)}} \cdot \sqrt{(1+n)} \right) + C.$

§. 198.

Es sey

$$d\mathfrak{X} = \frac{q\,dx}{(a + bx^2) \cdot \sqrt{(c - x^2)}}$$

so bringe man diesen Ausdruck auf die Form CLVI, indem man nur

$$d\mathfrak{X} = \frac{q\,dx}{a\left(\frac{a}{a} + \frac{b}{a}x^2\right).(\sqrt{c}).\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{c}\right)}}$$

$$= \frac{q}{a.\sqrt{c}} \cdot \frac{dx}{\left(1 + \frac{b}{a}x^2\right).\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{c}\right)}}$$

setzt.

Soll nun $\frac{x^2}{c} = z^2$ seyn, so hat man $x^2 = cz^2$, und $\frac{b}{a}x^2 = \frac{bc}{a}z^2$; $dx = dz.\sqrt{c}$; setzt man nun $\frac{bc}{a} = n$, so erhält man

$$d\mathfrak{X} = \frac{q}{a} \cdot \frac{dz}{(1 + nz^2).\sqrt{(1 - z^2)}}$$

wovon das Integral schon in (CLVI) angegeben ist.

Substituirt man $\frac{x}{\sqrt{c}}$ statt z, $\frac{bc}{a}$ statt n, und $\frac{q}{a}$ statt x, so erhält man

CLVII. $\mathfrak{X} = \frac{q}{\sqrt{(a^2 + abc)}}$. Arc. Tg. $\left(x\sqrt{\frac{a + bc}{a(c - x^2)}}\right)$

§. 199.

Es seyen a und m unveränderliche Größen, und

$$d\mathfrak{X} = m\,a^{mx}\,dx$$

so setze man $a^{mx} = u$; dieses giebt

$$mx.\,\log n.\,a = \log n.\,u$$

und

$$m.\,\log n.\,a.\,dx = d\log n.\,u = \frac{du}{u}$$

oder

$$m\,dx = \frac{du}{u \,.\, \log n.\ a}$$

also

$$mu\,dx = \frac{du}{\log n.\ a}$$

oder

$$m a^{mx}\,.\,dx = \frac{d\,a^{mx}}{\log n.\ a}$$

Demnach

$$\text{CLVIII.}\quad \mathfrak{X} = \frac{a^{mx}}{\log n.\ a}$$

Wäre a die Zahl e, deren natürlicher Logarithme $= 1$ ist, so hätte man

$$\text{CLIX.}\quad \int m e^{mx}\,dx = e^{mx}$$

§. 200.

Man kommt zuweilen auf die Differentialgleichung

$$\text{CLX.}\quad d\mathfrak{X} = e^{mx} \,.\, x^{\varepsilon}\,dx$$

Hier giebt sich $\mathfrak{X}$ auf folgende Weise:

1. Man sieht gleich, daß dieses Differential durch die Multiplikation des vorigen mit $\frac{x^{\varepsilon}}{m}$ entsteht, und daß es daher das erste Glied von $d\left(e^{mx} \,.\, \frac{x^{\varepsilon}}{m}\right)$ ausmacht. Es ist nämlich

$$d\left(e^{mx} \,.\, \frac{x^{\varepsilon}}{m}\right) = \frac{x^{\varepsilon}}{m} \,.\, de^{mx} + e^{mx} \,.\, d\left(\frac{x^{\varepsilon}}{m}\right)$$

$$= e^{mx} \,.\, x^{\varepsilon}\,dx + e^{mx} \,.\, \frac{dx^{\varepsilon}}{m}$$

wo das erste Glied das vorgegebene Differential $d\mathfrak{X}$ ist. Man hat also

$$e^{mx} \cdot x^s dx = d\left(e^{mx} \cdot \frac{x^s}{m}\right) - e^{mx} \cdot \frac{dx^s}{m}$$

und

$$\mathfrak{x} = \frac{x^s \cdot e^{mx}}{m} - \int e^{mx} \cdot \frac{dx^s}{m}$$

$$= \frac{x^s \cdot e^{mx}}{m} - \int \frac{e^{mx} \cdot s x^{s-1} dx}{m} \quad (\mathfrak{h}$$

2. Setzt man $e^{mx} \cdot x^{s-1} \cdot dx = E$, so kommt es jetzt nur darauf an, den Werth von $\frac{s}{m} \cdot E$ zu finden, oder $e^{mx} \cdot x^{s-1} \cdot dx$ zu integriren.

Vergleicht man nun $e^{mx} \cdot x^{s-1} \cdot dx$ mit $e^{mx} x^s \cdot dx$, so sind beide Differentialausdrücke von einerlei Form, nur $s - 1$ statt s gesetzt. Man erhält also wie (No. 1.)

$$E = \frac{x^{s-1} \cdot e^{mx}}{m} - \int \frac{e^{mx} \cdot (s-1) \cdot x^{s-2} \cdot dx}{m}$$

und

$$\frac{s}{m} \cdot E = \frac{s x^{s-1} \cdot e^{mx}}{m^2} - \frac{s}{m} \cdot \int \frac{e^{mx} \cdot (s-1) \cdot x^{s-2} \cdot dx}{m}$$

3. Man hat also jetzt statt ($\mathfrak{h}$ No. 1.)

$$\mathfrak{x} = \frac{x^s \cdot e^{mx}}{m} - \frac{s x^{s-1} \cdot e^{mx}}{m^2} + \frac{s \cdot (s-1)}{m^2} \cdot \int e^{mx} \cdot x^{s-2} \cdot dx$$

Das 3te Glied ist hier ein Produkt aus $\frac{s \cdot (s-1)}{m^2}$ in das Integral von $e^{mx} \cdot x^{s-2} \cdot dx$, wofür wir $\frac{s \cdot (s-1) \cdot E'}{m^2}$ setzen wollen.

4. Die Größe E' giebt sich wieder aus ($\mathfrak{h}$), indem man nur $s - 2$ statt s schreibt, also

$$E' = \frac{x^{s-2} \cdot e^{mx}}{m} - \int \frac{e^{mx} \cdot (s-2) \cdot x^{s-3}\, dx}{m}$$

Demnach das 3te Glied No. 3. $= \frac{s \cdot (s-1)}{m^2} \cdot E' =$

$$\frac{s \cdot (s-1) \cdot x^{s-2} \cdot e^{mx}}{m^3} - \frac{s(s-1) \cdot (s-2)}{m^3} \int e^{mx} \cdot x^{s-3}\, dx$$

Also nunmehr

$$\int e^{mx} \cdot x^s\, dx = \frac{x^s \cdot e^{mx}}{m} - \frac{s x^{s-1} \cdot e^{mx}}{m^2}$$

$$+ \frac{s \cdot (s-1) \cdot x^{s-2} \cdot e^{mx}}{m^3} - \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-1)}{m^3} \times$$

$$\int e^{mx} \cdot x^{s-3}\, dx$$

$$= e^{mx} \cdot \left(\frac{x^s}{m} - \frac{s x^{s-1}}{m^2} + \frac{s \cdot (s-1) \cdot x^{s-2}}{m^3} \right\} (\mathfrak{C}$$

$$- \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot x^{s-3}}{m^4} + \text{etc.} \Bigg\}$$

5. Wenn nun s eine ganze bejahte Zahl ist, so hat die eingeschlossene Reihe nur $s + 1$ Glieder. In vorstehender Reihe wäre das 5te Glied $=$

$$+ \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3) \cdot x^{s-4}}{m^5}$$

Wäre nun z. B. $s = 3$, so würde dieses Glied $= 0$, und es blieben nur die ($\mathfrak{C}$) bemerkten 4 oder $s + 1$ Glieder übrig. Es wäre also z. B.

$$\int e^{mx} \cdot x^3\, dx = e^{mx} \cdot \left(\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{3.2.x}{m^3} - \frac{3.2.1.x^0}{m^4} \right)$$

$$= e^{mx} \cdot \left(\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{6x}{m^3} - \frac{6}{m^4} \right)$$

§. 201.

Es sey

CLXI. $ady = ypdx + by^n qdx$

wo aber p und q selbst Funktionen von x bezeichnen; man soll die Integralgleichung finden.

Aufl. 1. Man setze $y = zu$, so daß z und u unbestimmte veränderliche Größen bedeuten, also

$$dy = zdu + udz$$

2. Hiermit verwandelt sich die vorgegebene Differentialgleichung in

$$audz + azdu = zupdx + bz^n u^n qdx$$

3. Weil nun z und u unbestimmte Zahlen sind, so ist es verstattet, das erste Glied zur Linken dem ersten zur Rechten des Gleichheitszeichens gleich zu setzen; dann muß man aber auch das 2te zur Linken dem 2ten zur Rechten gleich setzen, welches auch aus gleichem Grunde gestattet ist. So erhält man also

A) $audz = zupdx$, oder $adz = zpdx$

B) $azdu = bz^n u^n qdx$, oder $adu = bz^{n-1} u^n qdx$

4. Aus (No. 3. A) folgt

$$\frac{dz}{z} = \frac{pdx}{a}$$

also

$$\log n.\ z = \int \frac{pdx}{a} = \left(\int \frac{pdx}{a}\right) . \log n.\ e$$

$$= \ln. \left(e^{\int \frac{pdx}{a}}\right)$$

und daher

$$z = e^{\int \frac{pdx}{a}}$$

5. Aus (No. 3. B) folgt

$$\text{C)}\quad \frac{a\,du}{u^n} = b\,z^{n-1}\,q\,dx$$

Die Größe zur Linken ist $a\,u^{-n}\,du = a \cdot d\,\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$

also

$$\int \frac{a\,du}{u^n} = C - \frac{a}{(n-1)\cdot u^{n-1}}$$

wo C die Konstante ist.

Demnach (aus C)

$$C - \frac{a}{(n-1)\cdot u^{n-1}} = b \cdot \int z^{n-1}\,q\,dx$$

Oder, aus No. 1. $\frac{y}{z}$ statt u substituirt,

$$\text{D)}\quad C - \frac{a\,z^{n-1}}{(n-1)\cdot y^{n-1}} = b \cdot \int z^{n-1}\,q\,dx$$

6. Substituirt man aus No. 4. den Werth von z, so giebt sich

$$C - \frac{a \cdot e^{(n-1)\cdot \int \frac{p\,dx}{a}}}{(n-1)\cdot y^{n-1}} = b \cdot \int e^{(n-1)\cdot \int \frac{p\,dx}{a}} \cdot q\,dx$$

Gewöhnlich ist es am besten, die Gleichung D bei der Integrirung zu gebrauchen.

7. Ex. Es soll für

$$a\,dy = \frac{f\,y\,dx}{x} + y^n\,x^m\,dx$$

die Integralgleichung gesucht werden.

Die Vergleichung mit CLXI giebt

dort	a	b	n	y	dx	p	q
hier	a	1	n	y	dx	$\frac{f}{x}$	x^m

Nun drucke man zuerst (wegen der Anwendung von No. 5. D) z durch x aus. Aus No. 4 hat man

$$\text{logn. } z = \int \frac{p\,dx}{a} = \int \frac{f\,dx}{ax} = \frac{f}{a} \cdot \text{logn. } x$$

$$\text{also} \qquad z = x^{\frac{f}{a}}$$

Diesen Werth statt z, und x^m statt q in (D) gesetzt, giebt

$$C - \frac{a \cdot x^{(n-1)\cdot\frac{f}{a}}}{(n-1) \cdot y^{n-1}} = b \cdot \int x^{(n-1)\cdot\frac{f}{a}} \cdot x^m\,dx$$

$$= b \cdot \int x^{m+(n-1)\cdot\frac{f}{a}} \cdot dx$$

oder

$$C - \frac{a \cdot x^{(n-1)\cdot\frac{f}{a}}}{(n-1) \cdot y} = \frac{b \cdot x^{m+1+(n-1)\cdot\frac{f}{a}}}{m+1+(n-1)\cdot\frac{f}{a}}$$

Anm. Die hier No. CV bis CLXI mitgetheilten 57 Integralformeln sind freilich nicht zu allen jenen Untersuchungen hinreichend, womit die Herren Euler, Lagrange, Laplace die reine Mathematik bereichert haben, aber doch zureichend, sich in allen Theilen der Mathematik gründliche und für das bürgerliche Leben brauchbare Kenntnisse zu verschaffen. Wer noch tiefer in die Geheimnisse der höheren Analysis eindringen und den Geist jener Männer kennen lernen will, muß ihre Werke studiren, wozu er durch die gegenwärtige Anleitung hinlänglich vorbereitet ist. Eine reiche hierher gehörige Sammlung findet man in der von Meier Hirsch im Jahr 1810 herausgegebenen Sammlung von Integralformeln.

Dritter Theil

Anwendung der Analysis

auf räumliche Größen

oder

höhere Geometrie.

Höhere Geometrie.

Erstes Kapitel.

Die gerade Linie und der Kreis. Auch einige Bemerkungen über Linien der zweiten Ordnung.

§. 202.

Die höhere Geometrie hat wie die Geometrie der Griechen (die Elementargeometrie) räumliche Größen zum Gegenstande. Aber in der Behandlung dieses Gegenstandes sind beide wesentlich von einander verschieden. Letztere ist eigentlich reine Konstruktionslehre; sie geht von Begriffen aus, welche die Gegenstände der Untersuchung im Verstande abbilden und hiermit von jedem Objekte eine anschauliche Darstellung geben. Jede Untersuchung der Elementargeometrie ist eine Kombinirung solcher mit einer anschaulichen Darstellung verbundenen Objekte, deren Bild durch den festgesetzten Begriff im Verstande vollständig abgedruckt wird, oder mit andern Worten: alles beruht in ihr auf reiner Konstruktion des Verstandes, der hierbei keiner Erfahrungen oder sinnlichen Wahrnehmungen aus der materiellen Welt bedarf. Die Objekte, von welchen sie aus-

gcht, sind die gerade Linie und der Kreis, deren Bild im Verstande auf einer anschaulichen Kenntniß beruht; aus der Kombinirung dieser beiden Objekte werden alle übrige Konstruktionen abgeleitet, und es ist für die Geometrie der Griechen charakteristisch, daß alle ihre Lehren und zusammengesetzten Konstruktionen blos auf der Konstruktion der geraden Linie und der des Kreises beruhen müssen. Die Konstruktion des Kreises im Verstande beruht auf der Einfachheit der Forderung, uns in einer Ebene eine Figur zu denken, deren Umfang von einem gewissen inneren Punkte überall gleichweit absteht.

Ganz anders verhält es sich z. B. mit der Forderung, uns eine Figur in einer Ebene zu denken, deren Umfang in Bezug auf zwei in ihr liegende Punkte eine solche Lage und Gestalt habe, daß die Summe der Entfernungen dieser beiden Punkte vom Umfange überall gleich groß ist. Soll der Umfang dieser Figur durch einen gegebenen Punkt durchgehen, so erhalten wir doch unendlich viele ganz unähnliche Figuren, nachdem die beiden Centralpunkte mehr oder weniger von einander entfernt sind, und bei jeder einzelnen haben die verschiedenen Theile des Umfangs verschiedene Krümmung, die von Punkt zu Punkt aus der Krümmung eines Kreises in die eines anderen übergeht, so daß die Konstruktion irgend eines Theils dieses Umfangs die Konstruktion unendlich vieler Kreise erheischt. Ebenso verhält es sich mit jeder krummen Linie, die nicht selbst Kreislinie ist; es ist hieraus klar, daß die Kreislinie unter allen krummen Linien, die einzige ist, die eine geometrische Konstruktion zuläßt; und eben darum bleiben solche von der Elementargeometrie, die durchaus auf Konstruktionen gebaut ist, ganz ausgeschlossen. Sie machen den Gegenstand der höheren Geometrie aus, welche die Natur der krummen Linien mittelst Gleichungen bestimmen lehrt, durch welche

man soviele Punkte der krummen Linie mittelst Rechnungen finden kann, als verlangt werden, welche aber als Reihe von Punkten nie eine Linie bilden, so daß das Objekt im Ganzen nie als eine steetige Größe im Verstande konstruirt wird. Selbst die bekannte Gleichung für den Kreis $ax - x^2 = y^2$ giebt uns keine anschauliche Kenntniß von der Kreislinie, indem sie nur Punkte zusammenordnet, die in einer Kreislinie liegen, nie aber die Kreislinie selbst darstellt. In der Elementargeometrie wird konstruirt, in der höheren wird gerechnet. In der Elementargeometrie wird gelehrt, wie sich die gerade Linie und der Kreis kombiniren lassen, um andere in ihr vorkommende Objekte zu konstruiren; die Methode ist daher synthetisch. In der höheren Geometrie werden Objekte als nach einem (durch eine Gleichung) bestimmten Gesetze konstruirt vorausgesetzt, und daraus die Relationen abgeleitet, welche die zum Objekte gehörigen räumlichen Größen gegen einander haben; die Methode ist daher analytisch. Es fällt von selbst ins Auge, daß der Umfang der höheren Geometrie unermeßlich ist, und daß sich ihr nach der Natur der Sache keine Gränzen setzen lassen. Hier werde ich nur das Wichtigste davon vortragen, und mich hauptsächlich auf die Betrachtung der Kegelschnitte beschränken.

§. 203.

Die Linien, deren Konstruktionen in der Elementargeometrie — der vollkommensten und berichtigtsten aller Wissenschaften — als Postulate gelten, sind die gerade und die Kreislinie. Wir wollen daher auch hier mit ihrer Betrachtung den Anfang machen. Wir beziehen uns übrigens durchaus auf rechtwinklichte Koordinaten, wo nämlich die Ordinaten mit den Abscissen rechte Winkel machen.

Es sey nun aq (Fig. 17.) die Abscissenaxe, a der Anfangspunkt der Abscisse; ab, ad, af, willkührliche Abscissen, bc, de, fg die zugehörigen Ordinaten für die gerade Linie cs; es sey ferner ma $=$ α, ab $=$ x, bc $=$ y, aq $=$ β, qs $=$ c, so ist

$$mb : bc = mq : qs$$

also

$$(\alpha + x) : y = (\alpha + \beta) : c$$

und

$$\text{CLXIV.} \quad \frac{c \cdot (\alpha + x)}{\alpha + \beta} = y$$

Dieses ist die Gleichung für die gerade Linie bs. Weil sie weder x^2 noch y^2 noch xy, überhaupt kein Produkt aus 2 veränderlichen Faktoren enthält, so heißt die gerade Linie eine Linie der 1ten Ordnung. Die Gleichung gilt für eine algebraische Erklärung der geraden Linie. Man sieht, daß sie eigentlich nur einen Lehrsatz der Elementargeometrie ausspricht, der dort bewiesen wird, daß also hierin, im wissenschaftlichen Sinne, nichts höheres liegt.

§. 204.

Es sey der Halbmesser ca $=$ r (Fig. 18.), ab $=$ x, be $=$ y, ad $=$ a, so ist

$$ab : be = be : bd$$

oder

$$x : y = y : (a - x)$$

daher

$$\text{CLXIII.} \quad ax - x^2 = y^2$$

welches die gewöhnliche Gleichung für den Kreis ist.

Diese algebraische Erklärung des Kreises spricht wiederum nur einen Lehrsatz aus, den die Elementargeometrie beweißt.

§. 205.

Nehmen wir die Abscissen aus dem Mittelpunkte, wie $cb = u$ und bezeichnen die zugehörige Ordinate be mit z, so erhält man aus der Natur oder der schon angenommenen Konstruktion des Kreises und dem pythagorischen Lehrsatze

CLXIV. $$z = \sqrt{(r^2 - u^2)} = r\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right)}$$

gleichfalls eine algebraische Erklärung des Kreises, die zu unserer jetzigen Untersuchung bequemer als die vorige ist.

§. 206.

Unter der Quadratur einer Fläche versteht man die Darstellung eines allgemeinen Ausdrucks für ihren Flächeninhalt. Ist $cb = u$ eine unbestimmte Abscisse, und $\mathfrak{X}$ der Flächeninhalt des Stücks $cbef$, so hat man (XCV)

$$d\mathfrak{X} = z \cdot du$$

also

$$\mathfrak{X} = \int z\,du$$

$$= \int r \cdot \left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot du$$

oder

$$\mathfrak{X} = r^2 \cdot \int \left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot d\left(\frac{u}{r}\right)$$

Setzt man $r = 1$, so wird

$$\mathfrak{X} = \int (1 - u^2)^{\frac{1}{2}} \cdot du$$

also nach dem binomischen Lehrsatze

$$\mathfrak{X} = \int \left(1 - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{8}u^4 - \frac{1}{16}u^6 - \frac{5}{128}u^8 - \frac{7}{256} \cdot u^{10} \ldots\right) \cdot du$$

wo jedes Glied der Reihe mit du multiplicirt einen Differentialausdruck giebt, welcher leicht integrirt wird. Man findet namlich

CLXV. $x = u - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{40}.u^5 - \frac{1}{112}.u^7 - \frac{5}{1152}.u^9 - \frac{7}{2816}.u^{11}.....$

z. B. für $cb = 0,1.ca$ wäre

$$\text{Fläche } cbef = 0,1 - \frac{1}{6000} - \frac{1}{4000000} - \frac{5}{12800000000} - \text{etc.}$$

eine äußerst schnell konvergirende Reihe.

Man sieht, daß der Werth von $x = 0$ werden muß, wenn $u = 0$ ist, daher hier keine Konstante addirt zu werden braucht, welches auch in der Folge bei dergleichen Fällen zu bemerken ist.

§. 207.

Setzen wir $u = 1$, so erhalten wir

CLXVI. Fläche des Quadranten $caf = \begin{cases} 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} \\ - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}.... \end{cases}$

Ist also $ab = x$, und daher cb oder $u = 1 - x$, so wird

CLXVII. $\text{Fläche } abe = \begin{cases} 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \text{etc.} \\ -(1-x) + \frac{1}{6}(1-x)^3 + \frac{1}{40}(1-x)^5 \\ - + \frac{1}{112}(1-x)^7 + \text{etc.} \end{cases}$

$$= x - \frac{1}{6} \cdot (1 - (1-x)^3)$$

$$- \frac{1}{40} \cdot (1 - (1-x)^5) - \frac{1}{112} \cdot (1 - (1-x)^7) - \text{etc.}$$

Auch wird aus (CLXVI)

CLXVIII. Ganze Kreisfläche $= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \ldots\right)$

oder, wenn man den Durchmesser $= 1$ setzt,

CLXIX. Ganze Kr. Fl. $= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} \ldots$

§. 208.

Die Elementargeometrie giebt uns

$$\text{Peripherie des Kreises} = \frac{\text{Kreisfläche}}{\frac{1}{4}\text{ Durchmesser}}$$

Setzen wir also den Durchmesser $= 1$, so wird

CLXX. $\text{Peripherie} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \ldots\right)$

wodurch wir das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange zwar auch nur näherungsweise, aber schneller als nach der geometrischen Konstruktionslehre erhalten. Noch schneller konvergirende Reihen ergeben sich aus Betrachtung trigonometrischer Funktionen.

§. 209.

Aufg. Aus dem Sinus eines Bogens, welcher kleiner als ein Quadrant ist, den zugehörigen Bogen zu finden. Den Halbmesser $= 1$ gesetzt.

Aufl. Nach (CLXIII) ist, $a = 2$ gesetzt, $2x - x^2 = y^2$ also

$$(dx)^2 = \frac{y^2\,(dy)^2}{1 - y^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2}{1 - y^2}$$

und, wenn Bogen $ae = s$ gesetzt wird,

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$$

$$= (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

Daher nach dem binomischen Lehrsatze

$$ds = dy + \tfrac{1}{2}\,y^2\,dy + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}\,y^4\,dy$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot y^6}{1\cdot 2\cdot 3}\,dy + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot y^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot dy$$

$$+ \text{etc.}$$

und

CLXXII. $$s = y + \frac{1\cdot y^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot y^5}{2^3\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 3\cdot 7}\cdot y^7$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5\cdot 3\cdot 4\cdot 9}\,y^9 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^6\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 11}\cdot y'' + \text{etc.}$$

oder kürzer

$$s = y + \frac{Ay^2}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 3\cdot By^2}{4\cdot 5} + \frac{5\cdot 5\cdot Cy^2}{6\cdot 7}$$

CLXXII. $$+ \frac{7\cdot 7\cdot Dy^2}{8\cdot 9} + \frac{9\cdot 9\cdot E\cdot y^2}{10\cdot 11} + \text{etc.}$$

Dabei bezeichnet jeder große lateinische Buchstab das ganze vorhergehende Glied; es ist also $A = y$, $B = \frac{Ay^2}{2\cdot 3}$ u. s. f.

Setzt man $y = 1$, so erhält man den Bogen von 90°. Die Reihe konvergirt aber weit schneller, wenn man $y = \frac{1}{2}$ setzt, wozu der Bog. 30° gehört. Daher Bog. 90° =

$$3.\text{Bog. } 30° = 3.\left(\frac{1}{2} + \frac{A}{4.2.3} + \frac{3.3.B}{4.4.5} + \frac{5.5.C}{4.6.7}\right.$$

CLXXIII.

$$\left. + \frac{7.7.D}{4.8.9} + \frac{9.9.E}{4.10.11} + \text{etc.}\right)$$

Diese Zahl verdoppelt giebt die halbe Peripherie für den Halbmesser $= 1$, oder die ganze Peripherie für den Durchmesser $= 1$, welches die gewöhnlich mit π bezeichnete Zahl ist.

§. 210.

Aufg. Aus dem Bogen s den Sinus y zu finden.

Aufl. Weil die Reihe für s (CLXXI) nach den ungeraden Potenzen von y fortschreitet, so setzen wir

1) $y = s + \alpha s^3 + \beta s^5 + \gamma s^7 + \delta s^9 + \text{etc.}$

Nun ist $dy = \text{Cos. } s \,.\, ds$, oder $\text{Cos. } s = \frac{dy}{ds}$;

überdas

$$d\,\text{Cos. } s = -\,\text{Sin. } s \,.\, ds = -\,y \,.\, ds$$

oder

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\,y\,ds$$

also

$$2)\; y = -\frac{d\,dy}{(ds)^2}\left(= -\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right)$$

Aus No. 1 u. 2 folgt

$$s + \alpha s^3 + \beta s^5 + \gamma s^7 + \text{etc.} = -\,(3.2\alpha s + 5.4.\beta s^3 + 7.6.\gamma s^5 + 9.8.\delta s^7 + \text{etc.})$$

Also

$$-3\cdot 2\alpha s = s, \text{ oder } \alpha = -\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$-5\cdot 4\beta s^3 = \alpha s^2 \text{ oder } \beta = -\frac{\alpha}{4\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$-7\cdot 6\gamma s^5 = \beta s^5 \text{ oder } \gamma = -\frac{\beta}{6\cdot 7} = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

$$-9\cdot 8\delta s^7 = \gamma s^7 \text{ oder } \delta = -\frac{\gamma}{8\cdot 9},$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}$$

u. s. f.

Folglich vermöge der ersten Gleichung für y

CLXXIV. y oder Sin. Bog. $s = s\frac{s^3}{2\cdot 3} + \frac{s^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{s^9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \text{etc.}$

Haben A, B, C die im vorigen §. angegebene Bedeutung, so hat man kürzer

CLXXV. Sin. Bog. $s = s - \frac{As^2}{2\cdot 3} + \frac{Bs^2}{4\cdot 5} - \frac{Cs^2}{6\cdot 7} + \frac{Ds^2}{8\cdot 9} - \frac{Es^2}{10\cdot 11} + \text{etc.}$

Eine in der That höchst merkwürdige Relation zwischen Bogen und Sinus, oder auch Bogen und zugehöriger Sehne.

Der Sinus desjenigen Bogens, der seinem Halbmesser gleich wäre, ist hiernach =

$$s - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \text{etc.}$$

§. 211.

Aufg. Aus dem Bog. s den zugehörigen Cos. zu finden.

Aufl. $d\,\mathrm{Cos.}\,s = \pm \mathrm{Sin.}\,s \,.\, ds.$

Also aus voriger Aufl.

$$d\,\mathrm{Cos.}\,s = -s\,.\,ds + \frac{s^3}{2\cdot 3}\,ds - \frac{s^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,.\,ds + \frac{s^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\,.\,ds - \text{etc.}$$

und

$$\mathrm{Cos.}\,s = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{s^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.} + \mathrm{Const.}$$

Es ist aber, für $s = 0$, $\mathrm{Cos.}\,s = 1$, also

$$1 = 0 + C \text{ oder hier } C = 1$$

und daher vollständig

CLXXVI.
$$\begin{cases} \mathrm{Cos.}\,s = 1 - \dfrac{s^2}{2} + \dfrac{s^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \dfrac{s^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.} \\ \text{oder auch} \\ \mathrm{Cos.}\,s = 1 - \dfrac{As^2}{2} + \dfrac{Bs^2}{2\cdot 3\cdot 4} - \dfrac{Cs^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.} \end{cases}$$

Für einen Bog. s, der dem Halbmesser gleich ist, hat man also

$$\mathrm{Cos.} = 1 - \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} - \text{etc.}$$

§. 212.

Aufg. Aus dem Cos. eines Bogens den Bogen zu finden.

Aufl. Zur Abkürzung wollen wir Cos. Bog s mit z bezeichnen, so hat man

$$z = \text{Sin.}\,(90^\circ - s)$$

also (§. 209.) Bog. $(90^\circ - s) =$

$$z + \frac{A z^2}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3 \cdot B \cdot z^2}{4 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 5 \cdot C \cdot z^2}{6 \cdot 7} + \text{etc.}$$

und

CLXXVII. Bog. $s =$

$$\text{Bog.}\,90^\circ - \left(z + \frac{A z^2}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3 \cdot B \cdot z^2}{4 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 5 \cdot C z^2}{6 \cdot 7} + \text{etc.}\right)$$

wo Bog. 90° aus CLXXIII genommen wird.

§. 213.

Aufg. Aus der Tangente t eines Bogens s den Bogen zu finden.

Aufl. Aus (§. 132. LXXXV) hat man

$$dt = \text{Sec.}\, s^2 \cdot ds$$

also

$$s = \int \frac{dt}{\text{Sec.}\, s^2} = \int \frac{dt}{1 + t^2}$$

Die wirkliche Division giebt

$$\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \text{etc.}$$

Diese Reihe mit dt multiplicirt, und Glied vor Glied integrirt, giebt

CLXXVIII. $s = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 - \text{etc.}$

eine für die Relation zwischen Bogen und Tangente höchst merkwürdige Reihe. Sie giebt für den Bogen von 45°, dessen Tangente $= 1$ ist,

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

Setzt man also den Durchmesser $= 1$, so wird die

CLXXIX. Peripherie $= 4 \cdot (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.})$

So wenig diese Reihe zur wirklichen Berechnung geschickt ist, so sehr verdient doch ihre einfache Form unsere Aufmerksamkeit und Bewunderung.

§. 214.

Wir können aber von der Reihe (LXXVIII) einen sehr guten Gebrauch machen, wenn wir sie auf den Bogen von 30° anwenden.

Es ist nämlich, den Halbmesser $= 1$ gesetzt,

$$\text{Sin. } 30° = \tfrac{1}{2}; \quad \text{Cos. } 30° = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

daher

$$\text{Tang. } 30° = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

und $t^2 = \frac{1}{3}$

Demnach

$$\text{Bog. } 30° = \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{1}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \text{etc.}\right) \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Dieses mit 6 multiplicirt, giebt den halben Umfang

$$\text{CLXXX.} = \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} \ldots\right) \cdot \sqrt{12}$$

welches also auch den ganzen Umfang ausdruckt, wenn man den Durchmesser $= 1$ setzt.

§. 215.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 12 in vielen Decimalstellen, und deren Multiplikation mit der Reihe macht die Berechnung noch beschwerlich. Die folgende Betrachtung beseitigt aber auch diesen Umstand. Setzt man (§. 213.) $\alpha = 45° = \alpha + \beta$, so hat man

$$\text{tang. } 45^\circ = 1 = \frac{\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \beta}{1 - \text{tang. } \alpha \text{ tg. } \beta}$$

Demnach

$$\text{tg. } \alpha + \text{tg. } \beta = 1 - \text{tg. } \alpha \text{ tg. } \beta$$

und

$$\text{tg. } \beta + \text{tg. } \alpha \text{ tg. } \beta = 1 - \text{tg. } \alpha$$

also

$$\text{tg. } \beta = \frac{1 - \text{tg. } \alpha}{1 + \text{tg. } \alpha}$$

wo α willkührlich angenommen werden kann, und $\beta = 45^\circ - \alpha$ ist.

Setzt man tang. $\alpha = \frac{1}{2}$, so wird tang. $\beta = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Demnach (§. 213.)

I. Der zu tg. $\alpha = \frac{1}{2}$ gehörige Bogen

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \text{etc.}$$

II. Der zu tg. $\beta = \frac{1}{3}$ gehörige Bogen

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.}$$

und die Summe dieser beiden Reihen giebt den Bogen $\alpha + \beta$ oder Bog. 45° für den Halbmesser $= 1$, oder auch Bog. 90° für den Durchmesser $= 1$.

Demnach für die letztere Voraussetzung

CLXXXI.

$$\text{Ganzer Umfang } \pi = 4. \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} \ldots \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} \ldots \end{array} \right.$$

Die Berechnung der einzelnen Glieder beider Reihen geht sehr schnell von statten. Man berechnet nämlich

$$\tfrac{1}{2} = 0,5$$

$$(\tfrac{1}{2})^3 = \frac{0,5}{4} = 0,125$$

$$(\tfrac{1}{2})^5 = \frac{0,125}{4} = 0,03125$$

$$(\tfrac{1}{2})^7 = \frac{0,03125}{4} = 0,0078125$$

$$(\tfrac{1}{2})^9 = \frac{0,0078125}{4} = 0,001953125$$

u. s. f.

Dann werden aber alle diese Potenzen noch mit 3; 5; 7; 9 ꝛc. dividirt

Ebenso

$$\tfrac{1}{3} = 0,333333333\ldots$$

$$(\tfrac{1}{3})^3 = \frac{(\frac{1}{3})}{9} = 0,037037037037\ldots$$

$$(\tfrac{1}{3})^5 = \frac{(\frac{1}{3})^3}{9} = 0,004115226337\ldots$$

wo die gemachten Potenzen noch mit 3; 5; 7; 9 ꝛc. wie die vorigen dividirt werden.

Man sieht, daß ein Zeitaufwand von wenigen Stunden schon sehr weit führt. Jetzt hat man aber diese Berechnung nicht mehr nöthig *).

§. 216.

Aus der allgemeinen Gleichung für den Kreis (CLXIII) $ax - x^2 = y^2$ ersieht man, daß für einen sehr kleinen Werth von $\frac{x}{a}$ beinahe $ax = y^2$ wird. Bedingen wir aber

*) Die Berechnung der Kugelfläche und des kubischen Inhalts der Kugel s. unten (§. 253 u. 254).

für eine krumme Linie diejenige Gestalt, bei welcher für jeden Werth von x, bei einem angenommenen Werthe von a, allemal $ax = y^2$ wäre, so erhalten wir eine krumme Linie, welche von der Kreislinie sehr abweicht. Sie heißt die Parabel. Die Gleichung giebt zu erkennen, daß sich die krumme Linie ohne Ende fort immer mehr von der Abscissenaxe entfernt, weil mit der Vergrösserung von x auch $\sqrt{ax}$ oder y immer größer wird, daher diese krumme Linie nie wieder in sich selbst zurückkehren kann. Denkt man sich hingegen eine krumme Linie so konstruirt, daß, für jeden Werth von x, $ax - bx^2 = y^2$ wäre, so daß b eine angenommene Zahl bezeichnet *), so fällt gleich ins Auge, daß die hiermit angedeutete krumme Linie nothwendig in sich selbst zurückkehren muß. Die Gleichung läßt sich nämlich auch so schreiben

$$(a - bx) . x = y^2$$

und diese giebt sogleich zu erkennen, daß y zweimal $= 0$ wird: 1) für $x = 0$; 2) für $a - bx = 0$ d. i. für $x = \frac{a}{b}$. Da nun y nur an solchen Stellen $= 0$ ist, wo die Abscisse mit ihrem Endpunkt in die krumme Linie

---

*) Da a, x und y gerade Linien seyn sollen, so bezeichnen ax und y^2 Flächen; wäre nun b eine Linie, so wäre bx^2 ein geometrischer Körper, also die Glieder ungleichartig, welches nicht zugelassen werden kann; es muß also b eine Zahl bedeuten. Dieses muß bei allen Gleichungen für krumme Linien bemerkt werden. Zuweilen scheint die Gleichartigkeit der Glieder zu fehlen. Setzen wir z. B. beim Kreise den Halbmesser $= 1$; so wird bei ihm $a = 2$, also $2x - x^2 = y^2$, wo das erste Glied nur eine Abmessung zu haben scheint; eigentlich hat man aber $2r . x - x^2 = y^2$, wo dann $r = 1$ als Faktor weggelassen wird.

fällt, so hat diese krumme Linie offenbar eine Abscissenaxe von der Länge $\frac{a}{b}$, wo a eine Linie und b eine absolute Zahl ist. Und weil zu jeder Abscisse x zwei gleiche entgegengesetzte y gehören, die beide am Anfang und am Ende der Axe $\left(\frac{a}{b}\right) = o$ sind, so ist diese krumme Linie nothwendig in sich selbst zusammenlaufend, und sie bildet eine Figur, die von der Axe in zwei kongruente Hälften getheilt wird.

Man denke sich durch die Mitte der Axe eine gerade Linie senkrecht auf die Axe gezogen, welche die Figur in 2 Theile theilt. In gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt der Axe, die wir $= u$ setzen wollen, denke man zur Linken eine Ordinate $= y$, zur Rechten eine z, so ist

$$y^2 = \left(a - b \cdot \left(\frac{a}{2b} - u\right)\right) \cdot \left(\frac{a}{2b} - u\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}a + bu\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}a - bu\right) : b$$

$$z^2 = \left(a - b \cdot \left(\frac{a}{2b} + u\right)\right) \cdot \left(\frac{a}{2b} + u\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}a - bu\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}a + bu\right) : b$$

also

$$y = z$$

folglich sind alle Ordinaten in gleichen Entfernungen von jener Theilungslinie gleichgroß, und die Figur wird durch gedachte Linie, wie durch die Abscissenaxe in zwei kongruente Hälften getheilt.

Die zur halben Axe oder $x = \frac{a}{2b}$ gehörige Ordinate ist

$$y = \sqrt{\left(a - b \cdot \frac{a}{2b}\right)} \cdot \frac{a}{2b} = \sqrt{\tfrac{1}{2} a} \cdot \frac{a}{2b}$$

$$= \tfrac{1}{2} a \cdot \sqrt{\frac{1}{b}}$$

also $= \frac{1}{2} a$ oder $< \frac{1}{2} a$ oder $> \frac{1}{2} a$, nachdem $b = 1$, oder $b > 1$ oder $b < 1$ ist.

Diese krumme Linie heißt eine Ellipse. Man sieht, daß die Kreislinie mit unter den Ellipsen begriffen ist; sie ist nämlich eine solche Ellipse, bei welcher $b = 1$ ist.

§. 217.

Wäre eine krumme Linie so gestaltet, daß für sie

$$ax + bx^2 = y^2$$

wäre, so ergeben sich wieder ganz andere Folgen. Mit der Vergrösserung von x wird auch y immer größer, so daß sich die beiden zu x gehörigen Schenkel der krummen Linie oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe ohne Ende von der Axe entfernen, wie bei der Parabel. Hier aber erhält man auch Ordinaten für verneinte x. Setzt man nämlich $-x$ statt x, so wird

$$-ax + bx^2 = y^2$$

und

$$y = \sqrt{x} \cdot (bx - a)$$

welches immer mögliche Ordinaten giebt, sobald $bx > a$ oder $x > \frac{a}{b}$ wird.

Auch hier wird y zweimal $= 0$; 1) für $x = 0$; 2) für $x = \frac{a}{b}$; also geht die krumme Linie zweimal durch die Abscissenaxe, wo sich aber der 2te Durchgang auf verneinte Abscissen bezieht. Für die verneinten Abscissen fin-

den von $x = o$ bis zu $x = \frac{a}{b}$ keine Ordinaten statt, weil für diese Werthe $\sqrt{x.(bx - a)}$ unmöglich bleibt.

Vom Anfangspunkt der bejahten Abscissen hat man, für jede bejahte Abscisse x,

$$y^2 = ax + bx^2$$

Für jede aus demselben Punkte genommene verneinte Abscisse $\frac{a}{b} + x$ wird

$$y^2 = -a.\left(\frac{a}{b} + x\right) + b.\left(\frac{a}{b} + x\right)^2$$

$$= ax + bx^2$$

also in beiden Fällen y gleich groß. Daher deutet die Gleichung $ax + bx^2 = y^2$ auf zwei kongruente krumme Linien, deren Scheitelpunkte in der Entfernung $\frac{a}{b}$ von einander abliegen (wo nämlich $y = o$ ist), so daß von jedem dieser Scheitelpunkte die beiden Schenkel der krummen Linie auf völlig gleiche Weise, nur nach entgegengesetzten Richtungen, sich ohne Ende von der Axe entfernen. Diese krumme Linie heißt die Hyperbel.

§. 217.

Für Abscissen x deren Anfangspunkt in der krummen Linie liegt, mit rechtwinklicht zugeordneten gleichen entgegengesetzten Ordinaten y ist

CLXXXI. $Ax + \alpha x^2 = y^2$

ein allgemeiner Ausdruck, der den Kreis, die Parab die Ellipse und die Hyperbel unter sich begreift;

Für den Kreis ist $\alpha = -1$

— die Parabel . . $\alpha = o$

— — Ellipse . . α verneint

— — Hyperbel . α bejaht

Diese heißen Linien der 2ten Ordnung, weil die Glieder ihrer Gleichungen 2 Abmessungen haben.

Die allgemeine Gleichung für Linien der 2ten Ordnung ist

CLXXXII. $Ax + \alpha x^2 + By + \beta y^2 + Cxy + DE = o$

wenn rechtwinklichte Koordinaten verstanden werden, was auch übrigens die Abscissenaxe für eine Lage haben mag; sie mag auch innerhalb der Fläche der krummen Linie, oder außerhalb derselben gezogen werden, und der Anfangspunkt der Abscissen mag in der angenommenen Axe wo man will liegen. Die lateinischen Buchstaben bezeichnen Linien, die griechischen Zahlen, und beide können bejaht oder verneint genommen werden. Z. B. für gleiche entgegengesetzte Ordinaten wird $B = C = D = o$, und $\beta = -1$, wofern der Anfangspunkt der Abscissen in der krummen Linie liegt. Für andere Lagen der Abscissenaxe, oder für einen anderen Anfangspunkt der Abscissen oder wo beide Veränderungen zugleich statt haben, können B, C, D, E bestimmte Werthe erhalten. Allemal läßt sich eine solche Gleichung auf CLXXXI reduciren, so daß es keine andere krumme Linien der zweiten Ordnung giebt, als die erwähnten. Sie sind auch unter dem gemeinschaftlichen Namen der Kegelschnitte begriffen, weil sie sich alle aus einem Kegel schneiden lassen. Der Umstand, daß sie sich aus einem Kegel schneiden lassen, ist zwar an sich ganz gleichgültig, weil er auf die analytische Entwickelung ihrer Eigenschaften weiter keinen Bezug hat. Weil aber die Darstellung ihres Zusammenhangs mit dem Kegel wenig Raum erfordert, und die Art ihrer Entstehung aus dem Zerschneiden dieses geometrischen Körpers an sich ebenso interessant als mancher Satz von den Eigenschaften dieser krummen Linien selbst ist, so wollen wir ihre Entstehung aus dem Kegel hier nicht übergehen.

Zweites Kapitel.

Die Parabel.

§. 218.

BDMNCOD Tab. II. (Fig. 19.) sey ein senkrechter Kegel, BCD ein Durchschnitt durch ihn, in welchem des Kegels Axe liegt; nun lege man durch irgend einen Punkt in BC, wie A, eine Ebene parallel mit BD und senkrecht auf BDC, so bildet diese schneidende Ebene auf der Aufsenfläche des Kegels eine krumme Linie dm-AB; Ad ist die Axe der zugehörigen Fläche, und A der Scheitel der krummen Linie; man soll eine Gleichung für die krumme Linie finden.

Aufl. 1. Man stelle sich durch irgend einen Punkt in AC, wie n, eine Ebene durch des Kegels Axe BF senkrecht gelegt vor, so lehrt die Geometrie, daß die Linie n-rpn, worin diese Ebene des Kegels Oberfläche schneidet, ein Kreis ist, vom Durchmesser nr; zieht man nun aus s, dem Punkte, wo die krumme Linie und des Kreises Durchmesser einander schneiden, eine gerade Linie s- senkrecht auf nr, so wird s- auch senkrecht auf die Axe Ad; oder s- ist zugleich die zur Abscisse As = x und zu ns gehörige Ordinate y. Es ist demnach ns : s- = s- : sr; also

$$s\text{-}^2 = ns \cdot sr$$

Aber $Br : rn = As : ns$, also $ns = \frac{As \cdot nr}{Br}$, und daher

$$sr^2 = \frac{As \cdot nr}{Br} \cdot sr$$

oder, x statt As, und y statt sr gesetzt,

$$y^2 = \frac{nr}{Br} \cdot sr \cdot x = \frac{nr}{Br} \cdot AL \cdot x$$

Da nun $nr : Br = ns : As = ns : x$ ist, so hat man allgemein

CLXXXIII. $y^2 = \frac{ns}{x} \cdot AL \cdot x$

Man mag nun x und y so groß nehmen als man will, so bleibt $\frac{ns}{x}$ also auch $\frac{ns}{x} \cdot AL$ unveränderlich; man kann also $\frac{ns}{x} \cdot AL$ als eine unveränderliche Größe durch einen einzigen Buchstaben p ausdrucken, und dieses giebt

CLXXXIV. $y^2 = px$

§. 219.

Der Schnitt (§. 218) giebt also die Parabel (§. 216). Die Linien ns und AL, durch welche p bestimmt wird, liegen nicht wie der Durchmesser eines Kreises innerhalb der Fläche der krummen Linie auch nicht einmal mit der krummen Linie in einerlei Ebene. Man hat daher die Größe oder Linie p, welche die 4te Proportionallinie zu x, ns und AL ist, den Parameter (Nebenmesser) genannt.

§. 220.

Wie man auch p annehmen mag, so läßt sich aus jedem Kegel eine Parabel schneiden, die der Gleichung

$y^2 = px$ Genüge thut. Es ist nämlich $\frac{ns}{x} = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B}}$

und $AL = \frac{AB \,.\, \text{Sin. B}}{\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B}}$, also

$$p = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B}} \cdot \frac{AB \,.\, \text{Sin. B}}{\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B}} = \frac{AB \,.\, \text{Sin. B}^2}{\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B}^2}$$

und nun

$$\text{CLXXXV. } AB = \left(\frac{\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B}}{\text{Sin. B}}\right)^2 . p$$

Hiermit ist also die Stelle A auf der Kegelfläche bestimmt, wo man den Schnitt für die verlangte Parabel anfangen muß.

§. 220. *

Auch können wir die Gestalt des Kegels angeben, aus welchem sich eine bestimmte Parabel in einer verlangten Entfernung BA von der Spitze des Kegels schneiden läßt. Es ist nämlich $\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B} = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos. B}}{2}}$; also

$$AB = \frac{1 + \text{Cos. B}}{2 \,.\, (1 - \text{Cos. B}^2)} \,.\, p$$

$$= \frac{1 + \text{Cos. B}}{2 \,.\, (1 + \text{Cos. B}) \,.\, (1 - \text{Cos. B})} \,.\, p$$

$$= \frac{p}{2 \,.\, (1 - \text{Cos. B})}$$

Daher

$$\text{CLXXXVI. Cos. B} = 1 - \frac{p}{2 \,.\, AB}$$

welches die Gestalt des Kegels bestimmt, aus welchem in der gegebenen Entfernung AB von der Kegelspitze eine Parabel geschnitten werden kann, deren Parameter p gegeben ist

§. 221.

Da in der Parabel die Ordinaten von o an über alle Gränzen wachsen, so muß es auch eine Ordinate FC (Fig. 20.) geben, die dem halben Parameter gleich ist. Der zugehörige Punkt F heißt der Brennpunkt. Ich würde ihn lieber den Centralpunkt nennen.

§. 222.

Aufg. Die Entfernung AF des Scheitelpunkts vom Brennpunkte zu finden.

Aufl. Für diese Abscisse $x = AF$ ist FC oder $y = \frac{1}{2} p$ (§. 221.), aber $y = \sqrt{px}$, also

CLXXXVII. $\sqrt{px} = \frac{1}{2} p$ und $x = \frac{1}{4} p$

§. 223.

Eine gerade Linie vom Centralpunkt oder Brennpunkt bis zu irgend einem Punkte der krummen Linie gezogen heißt der zu diesem Punkte gehörige Radius Vektor (kürzer und der Sache angemessener: eine Centrallinie), wie FM. Es ist aber

$$FM = \sqrt{(FP^2 + PM^2)} = \sqrt{((x - \tfrac{1}{4} p^2) + px)}$$

$$= \sqrt{(x^2 + \frac{1}{16} p^2 - \tfrac{1}{2} px + px)}$$

oder

CLXXXVIII. $FM = x + \frac{1}{4} p$.

§. 224.

Wird daher für eine Parabel, deren Parameter p gegeben ist, der zu einer gegebenen Abscisse AP gehörige Punkt M der Parabel gesucht, so darf man nur in P ein Perpendikel errichten; der Punkt, in welchem ein aus F mit einem Halbmesser $= x + \frac{1}{4} p$ beschriebener Bogen

das Perpendikel schneidet, ist der gesuchte Punkt der Parabel. Dieses ist die bequemste Verzeichnung einer Reihe von Punkten, die in einer Parabel liegen.

§. 225.

Nach den Lehren des VII. Kapitels im II. Theile ist.

$$\text{Subtangente } gr = \frac{y\,dx}{dy}$$

Hier aber ist $dx = \frac{2y\,dy}{p}$, daher

$$\text{CLXXXIX. Subt.} = \frac{2y^2}{p} = 2x$$

$$\text{CXC. Subnorm.} = \frac{y\,dy}{dx} = \tfrac{1}{2}p$$

$$\text{Norm.} = \sqrt{(dg^2 + ge^2)} = \sqrt{(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)}$$

oder

$$\text{CXCI. Norm.} = \sqrt{(bx + \tfrac{1}{4}p^2)}$$

und $rd = \sqrt{(gr^2 + y^2)}$, also

$$\text{CXCII. Tang.} = \sqrt{(4x^2 + px)}$$

§. 226.

Wenn F der Brennpunkt und de die Normale an d ist, so ist allemal

$$\text{CXCIII. } Fd = Fe$$

Nämlich $Fg = Ag - AF = x - \frac{1}{4}p$, und $Fe = eg + Fg =$ Subn. $+ x - \frac{1}{4}p = \frac{1}{2}p + x - \frac{1}{4}p = x + \frac{1}{4}p = Fd$ (§. 223). Und wird dD der AB parallel gezogen, so ist Winkel $Fde = Fed = edD$; aber $edr = edh$ ($= 90°$), also $edr - Fde = edh - edD$, oder

$$\text{CXCIV. } Fdr = Ddh$$

Anm. Ein paraboliſcher Hohlſpiegel, mit ſeiner Axe gegen die Sonne gekehrt, empfängt die Strahlen in Richtungen, die der Axe beinahe parallel ſind, daher ſolche nach dem Reflexionsgeſetze ſo reflektirt werden, daß ſie alle nach der Reflexion durch den Centralpunkt F durchgehen, der daher den Namen des Brennpunkts erhalten hat. Dieſe Benennung iſt alſo für die Katoptrik ſehr gut gewählt, aber um ſoviel unſchicklicher für reine Mathematik.

§. 227.

Wenn r den Krümmungshalbmeſſer bezeichnet, ſo iſt (II. Th. VII. Kap.)

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy \,.\, ddx}$$

alſo hier, dy als unveränderliche Funktion betrachtet, und $dx = \frac{2ydy}{p}$ geſetzt, woraus ſich $ddx = \frac{2dy^2}{p}$ ergiebt,

$$r = \frac{\left(\frac{4y^2dy^2}{p^2} + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(dy) \,.\, \frac{2dy^2}{p}}$$

$$= \left(\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)}\right)^3 \,.\, \tfrac{1}{2}p$$

Demnach

CXCV.
$$\begin{cases} r = \dfrac{(\sqrt{(p^2 + 4y^2)})^3}{2p^2} \\ \text{oder auch} \\ r = \dfrac{(\sqrt{(p^2 + 4px)})^3}{2p^2} \end{cases}$$

§. 228.

Für den Scheitel der Parabel ist $x = 0$, also

CXCVI. $$r = \frac{(\sqrt{p^2})^3}{2p^2} = \frac{1}{2}p$$

Für $x = \frac{3}{4}p$ wird

CXCVII. $$r = \frac{(\sqrt{4p^2})^3}{2p^2} = 4p$$

§. 228.

Bezeichnet man das zu x und y gehörige Stück der Parabel mit s, so erhält man für die Rektifikation der Parabel (II. Th. VII. Kap.)

$$s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int \left(\frac{4y^2\,dy^2}{p^2} + dy^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$s = \int \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{p} \cdot dy$$

Verwandelt man $(4g^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, und multiplicirt solche mit dy, so erhält man eine Reihe von Differentialgrößen, die sich leicht integriren lassen. Weil aber diese Reihe nicht für alle Fälle gehörig konvergirt, so halten wir uns dabei nicht auf. Das folgende Verfahren ist für alle Fälle befriedigend.

1. Zur Abkürzung sey p die Einheit, auf die sich s und y beziehen, so wird

$$s = \int (1 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dy$$

oder, indem wir $2y = z$ setzen

$$s = \tfrac{1}{2} \int (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} . \, dz$$

2. Was nun auch z seyn mag, so giebt es für einen Kreis, dessen Durchmesser der Parameter der Parabel ist, allemal eine Tangente z, die einem gewissen Winkel ϕ zugehört; wir setzen also $z = \text{tang. } \phi$. Dann ist $\sqrt{(1 + \text{tang. } \phi^2)} = \text{Sec. } \phi$, und

$$s = \tfrac{1}{2} \int \text{Sec. } \phi . \, d \text{ tang. } \phi$$

3. Es ist aber tang. ϕ. Sec. ϕ, also

d tang. ϕ = Sin. ϕ. d tg. ϕ + Sec. ϕ. d Sin. ϕ

und

$$s = \tfrac{1}{2} \int (\text{Sec. } \phi . \text{ Sin. } \phi . \, d \text{ Sec. } \phi + \text{Sec. } \phi^2 . \, d \text{ Sin. } \phi)$$

$$= \tfrac{1}{2} \int (\text{Sec. } \phi . \text{ Sin. } \phi . \, d \text{ Sec. } \phi + \tfrac{1}{2} \text{ Sec. } \phi^2 . \, d \text{ Sin. } \phi$$

$$+ \tfrac{1}{2} \text{ Sec. } \phi^2 . \, d \text{ Sin. } \phi)$$

$$= \tfrac{1}{4} \int (\text{Sec. } \phi^2 . \, d \text{ Sin. } \phi + \text{Sin. } \phi . \, 2 . \text{Sec. } \phi . \, d \text{ Sec. } \phi)$$

$$+ \int \tfrac{1}{4} \text{ Sec. } \phi^2 . \, d \text{ Sin. } \phi$$

$$= \tfrac{1}{4} \text{ Sec. } \phi^2 . \text{ Sin. } \phi + \tfrac{1}{4} \int \text{Sec. } \phi^2 . \, d \text{ Sin. } \phi$$

4. Man hat aber $\text{Sec. } \phi^2 = \frac{1}{\text{Cos. } \phi^2}$, also $\int \text{Sec. } \phi^2 .$

$d \text{ Sin. } \phi = \int \frac{d \text{ Sin. } \phi}{\text{Cos. } \phi^2} = \int \frac{1}{1 - \text{Sin. } \phi^2}$. Setzt man nun (CXXIII) Sin. ϕ statt x; 1 statt a, und b = 1, so erhält man

$$\int \frac{d \text{ Sin. } \phi}{1 - \text{Sin. } \phi^2} = \tfrac{1}{2} \text{ logn. } \frac{1 + \text{Sin. } \phi}{1 - \text{Sin. } \phi}$$

Demnach

$$s = \tfrac{1}{4}\left(\text{Sec. } \phi^2 . \text{ Sin. } \phi + \tfrac{1}{2} \text{ logn. } \frac{1 + \text{Sin. } \phi}{1 - \text{Sin. } \phi} + C\right)$$

5. Es ist aber tg. $\phi = z = 2y$, und Sin. $\phi = \frac{\text{tang. } \phi}{\text{Sec. } \phi} = \frac{2y}{\sqrt{(1 + 4y^2)}}$, also auch Sec. ϕ^2. Sin. $\phi = (1 + 4y^2) . \frac{2y}{\sqrt{(1 + 4y^2)}}$ und

$$s = \tfrac{1}{4}\left((1+4y^2) . \frac{2y}{\sqrt{(1+4y^2)}} + \tfrac{1}{2} \ln . \frac{1 + \frac{2y}{\sqrt{(1+4y^2)}}}{1 - \frac{2y}{\sqrt{(1+4y^2)}}}\right) + C$$

6. Um C zu bestimmen, darf man nur, für $y = 0$, auch $s = 0$ setzen; dieses giebt $C = 0$.

7. Wird nun der Parameter nicht $= 1$, sondern $= p$ gesetzt, so muß $\frac{y}{p}$ statt y substituirt und das ganze mit p multiplicirt werden. Dieses giebt

$$s = p\left(\tfrac{1}{2} . \frac{y}{p} \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)} + \tfrac{1}{8} . \text{logn. } \varkappa \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2} + \frac{2y}{p}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2} + \frac{2y}{p}\right)}}\right)$$

oder

CXCVIII. $$s = \frac{y}{2p} . \sqrt{(p^2 + 4y^2)} + \tfrac{1}{8} p \varkappa \text{ logn. } \frac{\sqrt{(p^2 + 4y^2)} + 2y}{\sqrt{(p^2 + 4y^2)} - 2y}$$

oder auch

CXCIX. $s = \frac{\sqrt{px \cdot (p^2 + 4px)}}{2p} + \frac{1}{8} p \times$

$$\log n. \frac{\sqrt{(p^2 + 4px)} + 2\sqrt{px}}{\sqrt{(p^2 + 4px)} - 2\sqrt{px}}$$

Ex. Es sey, z. B. in Fussen, $p = 4$, $x = 25$, so wird

$$s = \frac{\sqrt{100 \cdot (16 + 400)}}{8} + \frac{1}{2} \cdot \log n. \frac{\sqrt{(16 + 400)} + 2\sqrt{100}}{\sqrt{(16 + 400)} - 2\sqrt{100}}$$

$$= 25{,}745 + \frac{1}{2} \log n. 102{,}01$$

$$= 25{,}745 + 2{,}312 = 28{,}057$$

Die zugehörige Ordinate ist $= \sqrt{4 \cdot 25} = 10$, und die zugehörige Sehne $= \sqrt{(25^2 + 10^2)} = 25{,}926$. Demnach die Differenz der krummen Linie und ihrer Sehne, für die angenommene Abscisse $= 28{,}057 - 26{,}926 = 1{,}131$ Fuß.

§. 229.

Die Quadratur der Parabel ist äußerst einfach. Die von x, y und s begränzte Flächenstück sey $= F$, so ist

CC. $F = \int y\,dx = \int \frac{2y^2\,dy}{p} = \frac{2y^3}{3p}$

oder auch

CCI. $F = \frac{2y \cdot px}{3p} = \frac{2}{3} xy.$

§. 230.

Denkt man sich die von x, y und s begränzte parabolische Fläche um die Abscisse x herumgedreht, so ist der körperliche Raum, welchen die Fläche durchläuft, ein paraboliſches Sphäroid oder ein paraboliſcher Kegel. Setzen wir seine gekrümmte Außenfläche $= z$, so ist

$$z = 2\pi \cdot \int y \cdot (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi \cdot \int y \cdot \left(\frac{4y^2\,dy}{p^2} + dy^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\pi}{p} \cdot \int (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} \cdot y\,dy$$

Setzt man $4y^2 + p^2 = v^2$, so wird $y\,dy = \frac{v \cdot dv}{4}$. Daher

$$z = \frac{2\pi}{p} \cdot \int \frac{v^2\,dv}{4} = \frac{1}{6 \cdot p}\,\pi v^3 + C$$

$$= \frac{\pi}{6p} \cdot (4y^2 + p^2) \cdot \sqrt{(4y^2 + p^2)} + C$$

Für $y = o$ muß auch $z = o$ seyn, also

$$\frac{\pi}{6p} \cdot p^2 \cdot \sqrt{p^2} + C = o$$

und

$$C = -\frac{\pi p^2}{6}$$

also

CCII. $$z = \frac{\pi}{6p} \cdot (4y^2 + p^2) \cdot \sqrt{(4y^2 + p^2)} - \frac{\pi p^2}{6}$$

§. 231.

Der kubische Inhalt dieses parabolischen Sphäroids, sey K, so ist

CCIII. $$K = \pi \cdot \int y^2\,dx = \pi \cdot \int px \cdot dx = \frac{1}{2}\,p\pi x^2$$

Oder auch

CCIV. $$K = \pi \cdot \int \frac{2y^3\,dy}{p} = \frac{\pi y^4}{2p}$$

Endlich auch

CCV. $$K = \frac{\pi y^2 \cdot px}{2p} = \frac{1}{2}\,x \cdot \pi y^2$$

Drittes Kapitel.

Die Ellipse.

§. 232.

DBC (Fig. 21.) sey ein Axentriangel, der einen senkrechten Kegel in 2 kongruente Hälften zerlege, Aπ der Bd gleichlaufend, DBC = α dAC > α. Denkt man sich nun senkrecht auf das Dreieck DBC nach Ad eine Ebene durch den Kegel gelegt, so schneidet solche die Außenfläche des Kegels in einer krummen Linie dπAmd, deren Axe Ad ist: man soll die Gleichung für diese krumme Linie finden.

Aufl. Es sey nπrmn ein senkrecht durch BE genommener Querschnitt des Kegels, also ein Kreis, dessen Durchmesser nr die Axe Ad in s schneidet, sπ sey die zu ns im Kreise gehörige Ordinate, die dann auch als Ordinate der krummen Linie zur Abscisse As gehört, so ist

$$ns : s\pi = s\pi : sr$$

Wenn nun AL der CD gleichlaufend, und Ap, wo p in nr liegt, ein Stück von Aπ ist, so giebt sich sr = pr — ps, also

$$ns : s\pi = s\pi : (pr - ps)$$
$$= s\pi : (AL - ps)$$

Es sey nun Ad = a, so ist a : Pd = As : ps, also

$$ps = \frac{As \,.\, Pd}{a} = \frac{AL \,.\, As}{a}$$

und

$$ns : s\tau = s\tau : \left(AL - \frac{AL \,.\, As}{a}\right)$$

oder, weil s in der Ad wo man will liegen kann, allgemein

$$ns : y = y : \left(AL - \frac{AL \,.\, x}{a}\right)$$

Demnach

$$y^2 = ns \,.\, \left(AL - \frac{AL \,.\, x}{a}\right)$$

$$= \frac{ns}{x} \,.\, AL \,.\, \left(x - \frac{x^2}{a}\right)$$

oder, wenn der Winkel $dAn = \beta$ gesetzt wird,

$$\text{CCVI.} \quad y^2 = \frac{AL \,.\, \text{Sin. } \beta}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\alpha} \,.\, \left(x - \frac{x^2}{a}\right)$$

Hier ist für alle Abscissen x der Ausdruck $\frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\alpha} \,.\, AL$ eine unveränderliche Linie, die wie bei der Parabel durch p ausgedruckt werden kann. Hiermit wird dann

$$\text{CCVII.} \quad y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

Es giebt also der angenommene Schnitt nach Ad eine Ellipse (§. 216.), wo wiederum p der Parameter genennt wird, dessen Zusammenhang mit dem Kegel hieraus deutlich erkannt wird.

§. 233.

Die Ellipse wird durch p und a (durch den Parameter und die Axe) völlig bestimmt, und für jede so bestimmte Ellipse läßt sich der Winkel β ($= dAC$) und die Ent-

fernung BA angeben, in der sich die bestimmte Ellipse schneiden läßt, wenn die Gestalt des Kegels oder α gegeben ist. Man hat nämlich

$$\frac{AL \,.\, \text{Sin.}\ \beta}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha} = p$$

auch $AL : Ad = \text{Sin.}\ AdL : \text{Sin.}\ ALd$

oder

$$AL : a = \text{Sin.}\ (\beta - \alpha) : \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\alpha$$

Also

$$\frac{p \,.\, \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha}{\text{Sin.}\ \beta} = \frac{a \,.\, \text{Sin.}\ (\beta - \alpha)}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha}$$

und

$$p \,.\, \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 = a \,.\, \text{Sin.}\ \beta \,.\, \text{Sin.}\ (\beta - \alpha)$$

woraus sich

$$p \,.\, (1 + \text{Cos.}\ \alpha) = 2a \,.\, \text{Sin.}\ \beta \,.\, (\text{Sin.}\ \beta \,.\, \text{Cos.}\ \alpha - \text{Cos.}\ \beta \,.\, \text{Sin.}\ \alpha)$$

ableiten läßt, wo also β durch a, p und α bestimmt ist. Weil nun

$$P = \frac{AB \,.\, \text{Sin.}\ \alpha \,.\, \text{Sin.}\ \beta}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}$$

ist, so hat man auch

$$AB = \frac{p \,.\, \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}{\text{Sin.}\ \alpha \,.\, \text{Sin.}\ \beta}$$

$$= \frac{a \,.\, \text{Sin.}\ \beta \,.\, \text{Sin.}\ (\beta - \alpha)}{\text{Sin.}\ \alpha \,.\, \text{Sin.}\ \beta}$$

$$= \frac{a \,.\, \text{Sin.}\ (\beta - \alpha)}{\text{Sin.}\ \alpha}$$

§. 234.

Die allgemeine Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ läßt sich auch auf Abscissen zu reduciren, die auf der Axe AB aus

dem Mittelpunkte der Axe C genommen werden. Jetzt wird nämlich $x = \frac{1}{2} a \pm u$, und die Substitution dieses Ausdrucks, statt x, giebt

CCVIII. $y^2 = \left(\frac{1}{4} a - \frac{u^2}{a}\right) . p$ (Fig. 22.)

also in gleichen Entfernungen von C zur Rechten und zur Linken gleich große Ordinaten, oberhalb und unterhalb AB.

§. 235.

Die größte Ordinate erhält man aus (CCVIII), indem man $u = o$ setzt; in diesem Falle wird

$$y = \sqrt{\frac{1}{4} ap} = \frac{1}{2} \sqrt{ap}$$

und

$$D\delta \text{ (Fig. 22.)} = \sqrt{ap}$$

Diese $D\delta$, welche die Ellipse in zwei kongruente Hälften theilt, heißt die kleine Axe der Ellipse, ob sie gleich größer seyn kann als die große a. Sie ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der großen Axe und dem Parameter, folglich $> a$, sobald $p > a$ ist. Wir bezeichnen sie in der Folge allemal mit c, also

CCIV. $c = \sqrt{ap}$

Die Gleichung $c^2 = ap$ giebt nun auch $\frac{c^2}{a^2} = \frac{p}{a}$,

oder

CCX. $c^2 : a^2 = p : a.$

§. 236.

Aufg. Zu der gegebenen großen Axe AB (Fig. 23.) $= a$ wird eine Ellipse verlangt, die in einer gegebenen Höhe $Cv = h$ noch eine verlangte Weite $mn = w$ haben soll.

Aufl. Hier ist $Ao = x = \frac{1}{2}(a - w)$; $y = om = h$; also

$$h^2 = p \cdot \left(\frac{1}{2}(a - w) - \frac{1}{4} \cdot \frac{(a - w)^2}{a}\right)$$

also

$$P = \frac{4ah^2}{2a(a - w) - (a - w)^2}$$

und nun aus (CCIX)

$$c = \sqrt{\frac{4a^2h^2}{(a - w) \cdot (2a - (a - w))}}$$

oder

$$\text{CCXI.} \quad c = \frac{2ah}{\sqrt{(a^2 - w^2)}}$$

womit nun die ganze Ellipse dargestellt ist.

§. 237.

In der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ax - x^2)$

setze man aus (CCX) $\frac{c^2}{a^2}$ statt $\frac{p}{a}$, so erhält man

$$y = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{(ax - x^2)}$$

Denkt man sich über der Axe einen Halbkreis beschrieben, worin man die Ordinaten $= Y$ gesetzt, so sind die zu einerlei Abscissen gehörigen Ordinaten der Ellipse

$$\text{CCXII.} \quad y = \frac{c}{a} \cdot Y$$

Es kann also die Ellipse ein gedruckter Bogen genannt werden, in welchem alle Ordinaten in demselben Verhältnisse kleiner als die des Halbkreises sind, in welchem die kleine Axe kleiner ist als die grose.

§. 238.

Der Punkt F in der großen Axe (Fig. 22.), in welchem die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, heißt auch hier der Brennpunkt (besser: Centralpunkt). Aus der Kongruenz der beiden durch die kleine Axe von einander abgetheilten Hälften der Ellipse folgt, daß es in der andern Hälfte einen eben solchen Brennpunkt f geben müsse.

§. 239.

Aufg. Die Lage der beiden Brennpunkte F, f zu bestimmen.

Aufl. Aus a und c, oder auch aus a und p. Die zu $AF = x$ gehörige Ordinate y ist $= \frac{1}{2} p$, also, $CF = Cf$ unter u verstanden,

$$(\tfrac{1}{2} p)^2 = p \cdot \left(\tfrac{1}{4} a - \frac{u^2}{a}\right)$$

oder

$$\tfrac{1}{4} p = \tfrac{1}{4} a - \frac{u^2}{a}$$

also

$$\tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} ap = u^2 \quad (\text{h}$$

und

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)} \\ \text{oder auch} \\ \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} \end{cases}$$

Daher

CCXIII.

$$\begin{cases} AF = \begin{cases} \frac{1}{2} a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)} \\ \text{oder} \\ \frac{1}{2} a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} \end{cases} \\ Af = \begin{cases} \frac{1}{2} a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)} \\ \text{oder} \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} \end{cases} \end{cases}$$

§. 240.

Aus (vorigen §. h) hat man auch $p = a - \frac{4u^2}{a}$.

Es sey nun der Abstand des näheren Brennpunkts vom Anfange der Axe A $= \alpha$; der Abstand des entfernteren von A $= \beta$, so ist $u = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$, also

$$P = a - \frac{\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2}{\alpha + \beta}$$

Aber $a = \alpha + \beta$; demnach

CCXIV. $$p = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

Bezeichnen wir die Abscisse u (§. 239. h) oder hier CF mit q, so hat man auch

CCXV. $$\begin{cases} p = a - \frac{4q^2}{a}, \text{ und } ap \text{ oder} \\ c^2 = a^2 - 4q^2 \end{cases}$$

§. 241.

Aufg. Die Größe der Centrallinien (Radien-Vektoren) dF, df zu bestimmen, wo d ein willkührlicher Punkt in der elliptischen Linie ist.

Aufl. Im rechtwinklichten Dreieck dqF ist

$$dF^2 = qF^2 + qd^2$$

Es ist aber $qF = q - (\frac{1}{2}a - x)$;

$$qd^2 \ (= y^2) = \frac{a^2 - 4q^2}{a^2} \cdot (ax - x^2)$$

Hieraus giebt sich

$$dF^2 = \left(\frac{1}{2}a - q + \frac{2qx}{a}\right)^2$$

also

CCXVI. $$dF = \frac{1}{2}a - q + \frac{2qx}{a}$$

Auf gleiche Weise findet man

CCXVII. $df = \frac{1}{2}a + q - \frac{2qx}{a}$

CCXVIII. $dF + df = a$

d. h. die Summe zweier aus einem Punkte der Ellipse gezogenen Centrallinien ist allemal der großen Axe gleich.

§. 242.

Man findet hiernach die beiden Brennpunkte, wenn man aus dem Endpunkt der kleinen Axe mit einem Halbmesser, welcher der halben großen Axe gleich ist, einen Bogen beschreibt, der die große Axe in zweien Punkten durchschneidet.

§. 243.

Die kleinstmögliche Centrallinie in einer Ellipse ergiebt sich aus (CCXVI), wenn man $x = o$ setzt; sie ist also $= \frac{1}{2}a - q = AF$. Ebenso ist die größtmögliche, indem man $x = a$ setzt, $dF = \frac{1}{2}a - q + \frac{2qu}{a} = \frac{1}{2}a - q + 2q$, oder $= \frac{1}{2}a + q = Af$.

§. 244.

Aus (II. Th. VII. Kap.) ist Subt. $= \frac{ydx}{dy}$. Die Gleichung für die Ellipse giebt aber

$$dx = \frac{2ay}{ap - 2px} \cdot dy$$

Also

$$\text{Subt.} = \frac{2ay^2}{ap - 2px} = \frac{2a\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}{ap - 2px}$$

oder

CCXIX. Subt. $= \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$; auch

CCXX. Subt. $= \frac{ax - x^2}{u} = \frac{Y}{u}$

wo Y die Ordinaten im Halbkreise bezeichnet, welchen man sich über der Axe a beschrieben denkt.

Auch hat man Subnorm. $= \frac{y\,dy}{dx}$, und die Substitution des Werthes von dx giebt

CCXXI. Subn. $= \frac{(\frac{1}{2}a - x) \cdot p}{a} = \frac{up}{a}$

§. 245.

Die horizontale MN (Fig. 24.) welche die Ellipse in o berührt, macht mit der Axe BA den Winkel BTN; dieser sey $= \alpha$, so ist

$$\text{tang. } \alpha = \frac{mo}{mT} = \frac{y}{\text{Subt.}}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}a - x)\sqrt{(px - \frac{px^2}{a})}}{ax - x^2}$$

$$= \left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2}a - x) \cdot (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}{ax - x^2}$$

$$= (\tfrac{1}{2}a - x)\left(\frac{p}{a \cdot (ax - x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

also

$$\text{tg. } \alpha^2 = \frac{p}{a} \cdot \frac{(\frac{1}{2}a - x)^2}{ax - x^2}$$

und

$$\frac{a}{p} \cdot \text{tang. } \alpha^2 \cdot (ax - x^2) = \tfrac{1}{4} a^2 - ax + x^2$$

oder

$$\left(1 + \frac{a}{p} \cdot \text{tang. } \alpha^2\right) \cdot x^2 - \left(a + \frac{a^2}{p} \cdot \text{tg. } \alpha^2\right) \cdot x = -\tfrac{1}{4} a^2$$

Daher

$$x^2 - ax = -\frac{a^2 p}{4 \cdot (p + a \cdot \text{tang. } \alpha^2)}$$

Man sieht sogleich, daß es in blos arithmetischer Hinsicht nothwendig zwei Werthe von x geben müsse, die der Forderung, daß $x^2 - ax = -\frac{a^2 p}{4 \cdot (p + a \cdot \text{tg. } \alpha^2)}$ werde, Genüge thun; aber die besondere Bedingung, daß die zu x gehörige Ordinate bis zur geraden MN reichen solle, läßt hier nur die kleinere Abscisse (Am) zu. Die Auflösung der quadratischen Gleichung giebt daher

$$x = \tfrac{1}{2} a - \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 \cdot \left(1 - \frac{p}{p + a \cdot \text{tg. } \alpha^2}\right)}$$

oder

CCXXII. $$x = \tfrac{1}{2} a \cdot \left(1 - \text{tang. } \alpha \cdot \sqrt{\frac{a}{p + a \cdot \text{tg. } \alpha^2}}\right)$$

Anm. Diese Formel bestimmt zugleich die tiefste Stelle o einer Ellipse, deren Axe unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist; sie beantwortet daher auch die mechanische Frage: (Fig. 25.)

Wenn eine Schnur von der Länge AB in zwei beliebigen Stellen F und f, wo FA = fB seyn soll, mit ihren Enden befestigt, und nun ein Körper P mittelst eines Hakens so an die Schnur aufgehängt wird, daß er an derselben ungehindert herabgleiten kann; die Stelle o zu finden, wo dieser Körper P ruhig hängen bleiben muß.

Weil allemal $Fo + of = AB$ seyn muß, so liegt o in einer Ellipse, deren große Axe $a = AB$ ist, und deren Brennpunkte die Stellen F und f sind. Ist nun C der Mittelpunkt der Axe, so ist $CF = Cf = q$, und aus (CCXV) $p = a - \frac{4q^2}{a}$. Ist nun MAN horizontal, und BAN $= \alpha$ gegeben, so hat man aus (CCXXII) die zur tiefsten Stelle o gehörige Abscisse, deren zugehörige Ordinate $\sqrt{\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$ die Stelle o angiebt.

§. 246.

Aufg. w sey ein willkührlicher Punkt in der elliptischen Linie (Fig. 22.), und wT die zugehörige Tangente; F, f die beiden Brennpunkte; man soll das Verhältniß Tf : wf, ingleichem TF : wF bestimmen.

Aufl. Es ist $Tf = TA + AC + Cf =$ Subt. $-x + \frac{1}{2}a + q. = \frac{ax}{a-2x} + a + q - \frac{a^2}{4.(\frac{1}{2}a - x)}$

$+ q + \frac{a^2 + 4uq}{4u}$.

Ferner $wf = \frac{1}{2}a + q - \frac{2qx}{a} = \frac{1}{2}a + \frac{(a-2x).q}{a}$

$= \frac{a^2 + 4.(\frac{1}{2}a - x).q}{2a} = \frac{a^2 + 4uq}{2a}$. Daher

$Tf : wf = 2a : 4u = a : 2u$

Ebenso wird

$$TF = \frac{a^2 - 4up}{4u}$$

$$wF = \frac{a^2 - 4up}{2u}$$

Also

$$TF : wF = a : 2u.$$

§. 247.

Zieht man die FN der fw gleichlaufend, so ist

$$TF : FN = Tf : wf = a : 2u$$

Daher

$$FN = \frac{TF \cdot 2u}{a} = wF \text{ (vorigen §.)}$$

folglich

$$\text{Winkel } FNw = FwN$$

Wird Tw nach V verlängert, so ist außerdem auch FNw $=$ fwV; demnach

$$FwN = fwV$$

d. h. Zwei aus einem Punkte w der Ellipse gezogene Brennpunkts- oder Centrallinien machen mit der zu w gehörigen Berührungslinie gleiche Winkel. Nach den bekannten Reflexionsgesetzen müssen daher alle aus dem einen Centralpunkte eines elliptischen Hohlspiegels auf die elliptische Spiegelfläche fallende Strahlen nach der Reflexion durch den andern Centralpunkt durchgehen. Eben hierauf gründet sich auch hier die der Geometrie gar nicht angemessene Benennung der **Brennpunkte**.

§. 248.

Hierauf gründet sich eine sehr leichte Methode, an einer gegebenen Stelle w eine Normale wv zu ziehen. Zieht man nämlich die wv so, daß sie den Winkel Fwf in zwei gleiche Theile theilt, so ist

$$FwT + vwF = fwV + vwf$$

oder

$$vwT = vwV$$

also vw auf TV senkrecht, und daher wv eine Normale.

§. 249.

Den Krümmungshalbmesser r für jede Stelle w (Fig. 22.) anzugeben.

Aufl. Nach (II. Th. VII. Kap.) ist allgemein

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy \,.\, ddx}$$

Hier ist aber

$$dx = \frac{2aydy}{ap - 2px}$$

Diese Substitution giebt $r =$

$$\frac{(4a^2y^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}} \,.\, dy^2}{(ap - 2px)^3 \,.\, 2ady \,.\, \frac{(ap - 2px)\,dy + 2pydx}{(ap - 2px)^2}}$$

Der Nenner ist $=$

$$(a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4ap^2x - 4p^2x^2) \times 2ady^2$$

$$= 2a^3p^2dy^2$$

Demnach

CCXXIII. $r =$

$$\frac{(4a^2px - 4apx^2 + (ap - 2px)^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

§. 250.

Für $x = o$ wird also

CCXXIV. $r = \frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = \frac{1}{2}p$

Es ist also der Krümmungshalbmesser für den Scheitel der Ellipse dem halben Parameter gleich, wie bei der Parabel.

Auch ist nach (CCXIV) für den Scheitel

$$\text{CCXXV. } r = \frac{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{} = \frac{2\alpha\beta}{a}$$

Es ist aber allemal $2\alpha < a$, und $2\beta > a$, also

der Krümmungshalbmesser am Scheitel $< \beta$ und $> \alpha$.

Für $x = \frac{1}{2} a$ wird $r =$

$$\frac{(2a^3p - a^3p + a^2p^2 + 2a^2p^2 + a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

oder

$$\text{CCXVI. } r = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{x}{p}}$$

Daher auch nach (CCX)

$$\text{CCXXVII. } r = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{c}$$

und aus (CCXXVI und CCXIV)

$$\text{CCXXVIII. } r = \frac{1}{4} a \cdot \sqrt{\frac{(\alpha+\beta) \cdot a}{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{a^2}{4 \cdot \sqrt{\alpha\beta}}$$

Ist der Durchmesser des Krümmungskreises, für $x = \frac{1}{2} a$, $= D$, so ist $D = a \cdot \frac{a}{c}$; daher auch

$$\text{CCXXIX. } a = \sqrt{c \cdot D}$$

Diese Formel dient, die Weite eines elliptischen Bogens zu finden, der eine verlangte Höhe $\frac{1}{2} c$ und im höchsten Punkte noch die Krümmung oder Wölbung eines Kreises von gegebenem Durchmesser D habe. Es sey z. B. $\frac{1}{2} c = 18$ Fuß, $D = 64$ Fuß, so wird $a = \sqrt{36 \cdot 64} = 48$ Fuß.

§. 251.

Für die Rektifikation der Ellipse giebt uns die allgemeine Formel

$$s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

keine brauchbare Reihe.

Wir suchen daher zuerst einen bequemeren Ausdruck für ds, wozu uns die Gleichungen

$$ds = du \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{du^2}\right)}; \quad \frac{a^2 - c^2}{4} = q^2$$

dienen.

Die zur Abscisse u in dem über der Axe a beschriebenen Halbkreise gehörige Ordinate heiße Y, so ist $y = \frac{c}{a} Y =$

$$\frac{c}{a} \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 - 4q^2)}}{a} \cdot \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)}.$$

Daher

$$dy = - \frac{\sqrt{(a^2 - 4q^2)}}{2a \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)}} \cdot 2u\,du$$

und

$$\frac{dy^2}{du^2} = \frac{a^2 - 4q^2}{a^2 \cdot (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)} \cdot u^2$$

Hieraus folgt

$$1 + \frac{dy^2}{du^2} = \frac{\tfrac{1}{4} a^4 - 4q^2 u^2}{a^2 (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)}$$

Setzt man $\frac{1}{2} a = 1$, also $a = 2$, so wird

$$1 + \frac{dy^2}{du^2} = \frac{4 - 4q^2 u^2}{4 \cdot (1 - u^2)} = \frac{1 - q^2 u^2}{1 - u^2}$$

Demnach

$$ds = du \cdot \sqrt{\frac{1 - q^2 u^2}{1 - u^2}}$$

Es ist aber

$$\frac{1 - q^2 u^2}{1 - u^2} = 1 + (1 - q^2) \cdot u^2 + (1 - q^2) \cdot u^4 + (1 - q^2) \cdot u^6 + \text{etc.}$$

Nun setze man $1 - q^2 = k$, und

$$(1 + k \cdot u^2 + k \cdot u^4 + k \cdot u^6 + \text{etc.})^{\frac{1}{2}} = 1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 + \delta u^8 + \text{etc.}$$

so wird, indem man auf beiden Seiten das Quadrat macht,

$$1 + ku^2 + ku^4 + ku^6 + ku^8$$
$$= 1 + 2\alpha u^2 + 2\beta \Big\} \cdot u^4 + 2\gamma \Big\} \cdot u^6 + 2\delta \Big\} \cdot u^8 + \text{etc.}$$
$$+ \alpha^2 \Big\} \quad + 2\alpha\beta \Big\} \quad + 2\alpha\gamma \Big\}$$
$$+ \beta^2 \Big\}$$

Also

$k = 2\alpha$ oder $\alpha = \frac{1}{2} k$

$k = 2\beta + \alpha^2 = 2\beta + \frac{1}{4} k^2$

Daher $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} k^2$

$k = 2\gamma + 2\alpha\beta = 2\gamma + \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{8} k^3$;

Daher $\gamma = \frac{1}{2} k - \frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^3$;

$k = 2\delta + 2\alpha\gamma + \beta^2$

$= 2\delta + \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{4} k^3 + \frac{1}{16} k^4 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{8} k^3 + \frac{1}{64} k^4$

$= 2\delta + \frac{3}{4} k^2 - \frac{3}{8} k^3 + \frac{5}{64} k^4$

Also $\delta = \frac{1}{2} k - \frac{3}{8} k^2 + \frac{3}{16} k^3 - \frac{5}{128} k^4$

u. s. f.

Demnach

$$ds = du + \tfrac{1}{2} k u^2 du + (\tfrac{1}{2} k - \tfrac{1}{8} k^2) \cdot u^4 du$$

$$+\left(\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{4}k^2+\frac{1}{16}k^3\right).u^6du+\left(\tfrac{1}{2}k-\tfrac{3}{8}k^2+\frac{3}{16}k^3-\frac{5}{128}k^4\right).u^8du$$
$$+\text{ etc.}$$

und CCXXX.

$$s=u+\tfrac{1}{6}ku^3+\frac{1}{10}.k.(1-\tfrac{1}{4}k).u^5+\frac{1}{14}k.\left(1-\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{8}k^2\right).u^7+\frac{1}{18}k.\left(1-\tfrac{3}{4}k+\tfrac{3}{8}k^2-\frac{5}{64}k^3\right).u^9$$
$$+\text{ etc.}$$

Für $k=1$ und $u=1$ wird

$$s=1+\tfrac{1}{6}+\frac{3}{40}+\frac{5}{112}+\frac{35}{1152}+\text{ etc.}$$

wie oben (CLXXI), weil in diesem Falle die Ellipse ein Kreis ist.

§. 252.

Weil $y=\frac{c}{a}.Y$ ist, so hat man für die Quadratur der Ellipse keine besondere Untersuchung nöthig. Ist das zur Abscisse u gehörige Flächenstück des Halbkreises $=F$, und das zu eben dieser Abscisse u gehörige Flächenstück der Ellipse $=E$, so hat man

CCXXXI. $E=\frac{c}{a}.F$

§. 253.

Aus (II. Th. VII. Kap.) ist, wenn z die Oberfläche des ellipitischen Sphäroids bezeichnet, $dz=2\pi yds$. Substituiren wir aus dem vorigen §. die Werthe

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)}$$

$$ds = du \cdot \sqrt{\frac{1 - q^2 u^2}{1 - u^2}}$$

so daß wir $\frac{1}{2} a = 1$ setzen, so ergiebt sich

$$dz = 2\pi \cdot \frac{c}{a} \cdot \left(\sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1 - q^2 u^2}{1 - u^2}}\right) \cdot du$$

$$= \pi c \sqrt{(1 - u^2)} \cdot \left(\sqrt{\frac{1 - q^2 u^2}{1 - u^2}}\right) \cdot du$$

oder

$$dz = \pi c \cdot (1 - q^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \cdot du$$

Setzt man nun $qu = x$, so wird indem wir zugleich $\frac{dx}{q}$ statt du schreiben,

$$dz = \frac{\pi c}{q} \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

und

$$z = \frac{\pi c}{q} \int (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

also wie (CLXV)

$$z = \frac{\pi c}{q} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152} - \frac{7x^{11}}{2816} - \text{etc.}\right)$$

oder, qu statt x gesetzt,

CCXXXII. $$z = \pi c \cdot \left(u - \tfrac{1}{6} q^2 u^3 - \frac{1}{40} q^4 u^5 - \frac{1}{112} q^6 u^7 - \frac{5}{1152} \cdot q^8 u^9 - \frac{7}{2816} \cdot q^{10} u^{11} \ldots.\right)$$

wo keine Const. hinzukommt, weil, für $u = 0$, auch $z = 0$ werden muß.

Für die Oberfläche des halben Sphäroids wird $u = 1$,

also

$$z = \pi c. \left(1 - \tfrac{1}{6} q^2 - \frac{1}{40} q^4 - \frac{1}{112} q^6 - \frac{5}{1152} q^8 - \frac{7}{2816} \cdot q^{10} \ldots\right)$$

und

CCXXXIII. $\left.\begin{matrix}\text{Ganze Oberflä-}\\ \text{che des ellipiti-}\\ \text{schen Sphäroids}\end{matrix}\right\} = 2\pi c. \left(1 - \tfrac{1}{6} q^2 - \frac{1}{40} q^4 - \frac{1}{112} q^6 - \text{etc.}\right)$

Für die Kugel ist $q = 0$, $c = 2$, also

CCXXXIV. Ganze Kugelfläche $= 4\pi$ (für $a = 1$)
oder $= 4 . \pi r^2$ wenn der Halbmesser mit r bezeichnet wird.

§. 254.

Ein elliptisches Sphäroid zu kubiren.

Aufl. Der kubische Inhalt für die Ordinate y ist aus II. Th. IV. Kap. wenn die Abscissen aus dem Mittelpunkte genommen werden,

$$K = \pi . \int y^2 \, du$$

also hier

$$K = \pi \int \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right) . \, du$$

oder

CCXXXV. $= \pi . \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^3}{3 a^2}\right)$

Daher für den kubischen Inhalt vom größten Kreise bis zum Scheitel oder Anfang der Axe, indem man $u = \frac{1}{2} a$ setzt,

$$K = \frac{1}{12} \pi a c^2$$

und für das ganze

CCXXXVI. Elliptische Sphäroid $= \frac{1}{6} \pi a c^2$.

Setzt man nun den Halbmesser einer Kugel $= r = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} c$, so erhält man

Für die Kugel

CCXXXVII. $K = \frac{1}{6} \pi a \cdot 4r^2 = \frac{2}{3} a \cdot \pi r^2$.

Viertes Kapitel.

Die Hyperbel.

§. 255.

CBD (Fig. 26.) sey wieder der Axentriangel eines senkrechten Kegels. Werden CB, DB nach oben verlängert, so daß B♂ = CB, Bζ = BD wird, so erhält man den oberen Axentriangel ♂Bζ, und man kann sich nun zwei senkrechte Kegel denken, die ihre gemeinschaftliche Spitze in B haben, und deren Axen in der geraden ♂BE liegen. Durch A, einen willkührlichen Punkt in BC denke man sich nach einer geraden Ad, welche mit der DB nach oben konvergirt, eine Ebene senkrecht auf den Axentriangel gelegt, die dann zugleich den oberen Kegel nach ad durchschneidet, so bildet der Schnitt auf den äußeren Kegelflächen die krummen Linien ,,τAnψ und maμ, man sucht eine allgemeine Gleichung für die ,,τAnψ.

Aufl. Man denke sich auf des Kegels Axe senkrecht den Durchschnitt nr, so bildet solcher einen Kreis vom Durchmesser nr; dieser Durchmesser schneidet die Axe Ad der krummen Linie in s; As gilt uns als Abscisse der krum-

men, zu der die senkrechte Ordinate $s\tau$ gehört; zu eben dieser Ordinate gehört im Kreise die Abscisse ns, und man hat

$$ns : s\tau = s\tau : sr.$$

Die $A\tau$ sey der BD gleichlaufend, und die AL der pr; bezeichnen wir die AL mit g, so ist $sr = sp + g$, also

$$ns : s\tau = s\tau : (sp + g) \quad (P$$

Bezeichnen wir die Aa, als Entfernung der beiden Scheitelpunkte von einander, mit a, so ist

$$sp : sA = rp : Aa = g : a$$

also

$$sp = \frac{p \cdot sA}{a}$$

Dieses in (P) gesetzt, giebt

$$ns : s\tau = s\tau : \left(\frac{g \cdot sA}{a} + g\right)$$

oder

$$ns : y = y : g \cdot \left(\frac{x}{a} + x\right)$$

also

$$y^2 = \frac{ns}{x} \cdot g \cdot \left(x + \frac{x^2}{a}\right) \quad (Q.$$

Man mag aber n wo man will nehmen, so bleibt $\frac{ns}{x}$ folglich auch $\frac{ns}{x} \cdot g$ eine unveränderliche Größe. Bezeichnen wir diese als Linie mit p, so wird

$$\text{CCXXXVIII.} \quad y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

Also ist $\tau\tau Au\downarrow$ die Hyperbel (§. 216).

§. 256.

Eben diese Gleichung begreift aber auch die obere krumme Linie m a μ mit in sich, so daß man nur die Abscissen von A aus auf der A δ nach oben nehmen darf.

Man erhält nämlich auch hier

$$P = \frac{AB \,.\, \text{Sin.}\ \beta \,.\, \text{Sin.}\ \alpha}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}$$

$$= \frac{AB \,.\, \text{Sin.}\ BAa \,.\, \text{Sin.}\ \alpha}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}$$

Es ist aber AB . Sin. BAa = Perpendikel By, also

$$p = By \,.\, \frac{\text{Sin.}\ \alpha}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}$$

Auf gleiche Weise wird für m a μ

$$P = \frac{aB \,.\, \text{Sin.}\ \delta a \zeta \,.\, \text{Sin.}\ \alpha}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}$$

$$= \frac{aB \,.\, \text{Sin.}\ BaA \,.\, \text{Sin.}\ \alpha}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}$$

$$= By \,.\, \frac{\text{Sin.}\ \alpha}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\,\alpha^2}$$

Also ist p für beide Theile der Hyperbel völlig einerlei.

Betrachtet man also den oberen Theil besonders, und nimmt die Abscissen in ihm von a aus, so gilt auch hier die Gleichung Q vorigen §.

Sollen aber die Abscissen auch für m a μ von A ausgenommen werden, so muß jede Abscisse auf A d durch — (a + x) ausgedruckt werden, wenn die auf A d genommenen x für die bejahten gelten. Setzt man also in (CCXXXVIII) — (a + x) statt x, so ergiebt sich eine der Hyperbel zugehörige Gleichung für verneinte Abscissen, nämlich

$$y^2 = p \cdot \left(-a - x + \frac{a^2 + 2ax + x^2}{a}\right)$$

$$= px + \frac{px^2}{a}$$ völlig wie CCXXXVIII.

Es ist also CCXXXVIII eine allgemeine Gleichung für die Hyperbel. Auch hier ist p der Parameter, a heißt die Zwerchaxe.

§. 257.

Für verneinte Abscissen, die von A aus nach B genommenen x als bejaht betrachtet, hat man (Fig. 27.)

$$y^2 = -px + \frac{px^2}{a} = -\left(px - \frac{px^2}{a}\right)$$

also

$$y = \sqrt{-\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$$

Daher von A bis a keine mögliche Ordinate für die Hyperbel, wegen des verneinten Zeichens unter den √. Setzt man aber dieses Zeichen bei Seite, so wird von A bis a für jede Abscisse x die zugehörige Ordinate

$$y = \sqrt{\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$$

welches die Ordinaten einer Ellipse sind, deren große Axe = a, und deren Parameter p der Parameter der Hyperbel ist. Denkt man sich die gerade C ζ gezogen, und nun C B ζ als Axentriangel eines Kegels, dessen Grundfläche C ζ zum Durchmesser hat, so giebt der Schnitt nach A a die gedachte Ellipse, welche als Verbindungsellipse der beiden kongruenten Hyperbeln angesehen werden kann.

Die Gleichung für die Hyperbel giebt also alle Relationen an, die für die 3 Kegelschnitte statt finden, die sich durch die nach d δ gedachte schneidende Ebene gleichzeitig

ergeben, indem die zu den 3 durchschnittenen Dreiecken gehörigen 3 Kegel als gleichzeitig durchschnitten betrachtet werden. Dieser Zusammenhang der Hyperbel und ihrer Gleichung mit den gedachten drei Kegeln ist meines Wissens noch von keinem Schriftsteller bemerkt worden.

§. 258.

Bezeichnen wir auch hier die kleine Axe der Verbindungsellipse mit c, so hat man $c^2 = ap$, und $p = \frac{c^2}{a}$. Dieses statt p in (CCXXXVIII) gesetzt, giebt

CCXXXIX. $y^2 = \frac{c^2}{a} \cdot \left(x + \frac{x^2}{a}\right)$

Daher auch

CCXL. $c^2 : a^2 = y^2 : (ax + x^2)$

§. 259.

Der Mittelpunkt der Verbindungsellipse heißt der Mittelpunkt der Hyperbel, indem man der Gleichung (CCXXXVIII) gemäß allemal die Durchschnitte der 3 Kegel mit der Vorstellung der zur Gleichung gehörigen krummen Linie verbindet, wobei also die Hyperbel allemal aus 2 einander gegenüber liegenden kongruenten Hälften besteht, wie Fig. 27, die ihre Scheitelpunkte A, a einander zukehren.

Die Vergleichung der allgemeinen Gleichung für die Hyperbel (CCXXXVIII) mit der für die Ellipse (CCVII), zeigt sogleich, daß man, statt + a bei der Ellipse, nur — a bei der Hyperbel setzen dürfe. Uebrigens heißt auch hier der Punkt F, in welchem die Ordinate $= \frac{1}{2} p$ ist, der Brennpunkt, (besser der Centralpunkt).

§. 260.

Bezeichnet man die Abscisse vom Mittelpunkte C ausgenommen bis zum Brennpunkte der Hyperbel mit q, wie §. 240, so hat man auch hier (wie §. 239. h, wo noch u statt q steht), nur + a statt — a gesetzt,

CCXLI. $q = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ap)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + ap)}$

wo aber die Wurzel bejaht und verneint genommen werden kann; die bejahte giebt CF, die verneinte Cf. Auch

CCXLII. Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel A $= \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + ap)} - \frac{1}{2}a$

oder auch $= \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)} - \frac{1}{2}a$

Und wie man (§. 241.) für die Ellipse die Summe zweier in einem Punkte der Ellipse zusammenstossenden Centrallinien = a fand, so findet man hier die Differenz

CCXLIII. $fm - Fm = a$.

§. 261.

Auch findet man wie CCXIX, nur — s statt a gesetzt

CCXLIV. Subt. $= \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x}$

und

CCXLV. Subn. $= \frac{(\frac{1}{2}a + x) \cdot p}{a}$

So auch, wie §. 247, wenn fz die verlängerte fw, wτ eine Tangente an w, und wg die zugehörige Normale ist,

CCXLVI. $Fwg = zwg$

und, nur + a mit — a verwechselt, für den zu x gehörigen Krümmungshalbmesser

CCXLVII. $r =$

$$\frac{(4a^2px + 4apx^2 + (ap + 2px)^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

Im Nenner hat man nämlich eigentlich $((-a)^2)^{\frac{3}{2}}$ statt $(a^2)^{\frac{3}{2}}$, es bleibt daher a^3 bejaht.

§. 262.

Wir kommen hier zur ersten Anwendung von §. 173. Nämlich:

Zu bestimmen, ob und wie sich den Hyperbeln Asymptoten ziehen lassen.

Hier ist

$$\text{Subt.} = \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x}$$

also z. B. für $Ap = x$,

$$At = \text{Subt.} - x = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$$

Demnach, wenn $Ap = \infty$ würde,

$$At = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \infty}{\frac{1}{2}a + \infty} = \frac{1}{2}a$$

d. h. Die Stelle t, in welcher eine unendliche Tangente die Axe schneidet, ist allemal der Mittelpunkt C der Hyperbel. In Bezug auf (Fig. 16.) wäre $a\alpha = \frac{1}{2}a$. Also (§. 173.)

$$a\beta = \frac{Y}{\text{Subt.}} \cdot a\alpha = \frac{Y}{\text{Subt.}} \cdot \frac{1}{2}a$$

Die zu Y gehörige unendliche Abscisse sey $\mathfrak{X}$, so ist

$$Y = \mathfrak{X} \cdot \sqrt{\left(\frac{P}{\mathfrak{X}} + \frac{P}{a}\right)}$$

$$\text{Subt.} = \frac{a\mathfrak{X} + \mathfrak{X}^2}{\frac{1}{2}a + \mathfrak{X}}$$

$$\frac{Y}{\text{Subt.}} = \frac{(\frac{1}{2}a + x) \cdot \sqrt{(\frac{p}{x} + \frac{p}{a})}}{a + x}$$

Weil aber $x = \infty$ ist, so wird

$$\frac{\frac{1}{2}a + x}{a + x} = 1; \sqrt{(\frac{p}{x} + \frac{p}{a})} = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

Demnach

CCXLVIII. $a\beta = (\sqrt{\frac{p}{a}}) \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$

Ist also C (Fig. 28.) der Mittelpunkt der Hyperbel, und wird nun die gerade Cs so gezogen, daß das in A errichtete Perpendikel $An = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ wird, so ist Cs eine Asymptote der Hyperbel. Auf solche Weise liegt die Hyperbel mit ihren 4 Schenkeln (Fig. 27.) zwischen 2 einander durchkreuzenden geraden Linien, welche die Asymptoten sind. Es läßt sich kein anderes Paar einander durchkreuzender Linien ziehen, wovon nicht die eine oder die andere (oder auch beide) die Hyperbel irgendwo durchschnitte.

§. 263.

Es sey CA (Fig. 28.) $= \frac{1}{2}a$, $An = Am = \frac{1}{2}\sqrt{ap} = \frac{1}{2}c$, also Cs, Cf Asymtoten, so ist, wenn Ap irgend eine willkührlich angenommene Abscisse ist, der die Ordinaten $p\alpha$, $p\gamma$ zugehören, $p\alpha = p\gamma$, $p\beta = p\delta$, also auch $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Ist AD der unteren Asymptote Cf gleichlaufend, so

ist $AD = \frac{nA}{nm} \cdot mc = \frac{1}{2}mC = \frac{1}{2}nC$; aber auch $nD : nC = nA : nm = 1 : 1$, also zugleich $nD =$

$\frac{1}{2}$ nC, daher nD = CD = AD, und CD . AD = $CD^2 = AD^2$.

Dieses Quadrat d. h. das Quadrat einer aus dem Scheitel A bis zur einen Asymptote parallel mit der anderen gezogenen geraden Linie (wie AD^2) heißt die Potenz der Hyperbel; ein freilich sehr unpassender Ausdruck; hyperbolisches Quadrat wäre eine der Sache doch etwas angemessenere Benennung.

Die Betrachtung der Figur giebt diese Potenz

$$AD^2 = CD^2 = \tfrac{1}{4} Cn^2 = \tfrac{1}{4}(CA^2 + An^2)$$

CCXLIX.
$$= \tfrac{1}{4}((\tfrac{1}{2}a)^2 + (\tfrac{1}{2}c)^2) = \frac{a^2 + c^2}{6}$$

§. 264.

Weil $CA : An = Cp : p\beta$, $CA = \frac{1}{2}a$, $An = \frac{x}{2}\sqrt{ap}$ und $Cp = \frac{1}{2}a + x$ ist, so wird

$$p\beta^2 = \tfrac{1}{4}ap + px + \frac{px^2}{a}$$

Ueberdas ist

$$p\alpha^2 = y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

also allgemein

CCL. $p\beta^2 - p'\alpha^2 = \frac{1}{4}ap = An^2 = \frac{1}{4}c^2$

Setzt man $p\beta = z$, so ist $\beta\alpha = \gamma\delta = z - y$, also $\gamma\delta \times \gamma\beta = (z-y).(z+y) = z^2 - y^2$, und daher

CCLI. $\gamma\delta \times \gamma\beta = An^2 = \frac{1}{4}c^2$

§. 265.

Wenn $\alpha\mu$, $\gamma\varepsilon$ den gegenüber liegenden Asymptoten parallel gezogen werden, so sind die beiden Dreiecke $\alpha\beta\mu$ und $\gamma\delta\varepsilon$ einander kongruent, also auch $\alpha\mu = \gamma\varepsilon$, und

$\mu\beta = \delta\iota$. Da nun überdas $C\beta = C\delta$, also auch $C\beta - \mu\beta = C\delta - \iota\delta$, oder $C\mu = C\iota$ ist, so folgt

CCLII. $C\iota \times \iota\gamma = C\mu \times \mu\alpha$.

§. 266.

Es sey αr der $C s$ gleichlaufend, so ist

$$An : Dn = \alpha\beta : \mu\beta = \beta\delta : C\mu$$

und

$$1)\ C\mu = \frac{\alpha\delta \cdot Dn}{An}$$

Aber $\alpha\beta \cdot \alpha\delta = \gamma\delta \cdot \gamma\beta = An^2$, also $\alpha\delta = \frac{An^2}{\alpha\beta}$,

und daher

$$2)\ C\mu = \frac{An^2 \cdot Dn}{An \cdot \alpha\beta} = \frac{An \cdot Dn}{\alpha\beta}$$

Und weil $\alpha\mu = \mu\beta$ (indem $AD = Dn$ ist), so ist überdas $\alpha\beta : \alpha\mu = \alpha\delta : C\mu$, und $C\mu = \frac{\alpha\mu \cdot \alpha\delta}{\alpha\beta}$, daher

$\frac{An \cdot Dn}{\alpha\beta} = \frac{\alpha\mu \cdot \alpha\delta}{\alpha\beta}$, und

$$3)\ \alpha\mu = \frac{An \cdot Dn}{\alpha\delta}$$

Folglich aus (No. 1 und 3.)

$$C\mu \cdot \alpha\mu = Dn^2 = AD^2.$$

§. 267.

Eine Gleichung zwischen Abscissen, die von C aus auf einer Asymptote genommen werden, und Ordinaten, die vom Ende der Abscissen in einer der anderen Asymptote parallelen Richtung bis zur Hyperbel gezogen werden, heißt die Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Bezeichnet man die so genommenen Ab-

ſciſſen, wie $C\mu$, mit x, die zugehörigen Ordinaten mit y, die AD mit P, ſo hat man (vorigen §.)

CCLIII. $xy = P^2$.

§. 268.

Wenn beide Axen der Verbindungsellipſe gleich groß ſind, $c = a$ (alſo $An = AC$), ſo heißt die Hyperbel eine gleichſeitige. In dieſem Falle wird die Ellipſe ein Kreis. Es muß alſo, um eine gleichſeitige Hyperbel zu erhalten, der Schnitt (Fig. 26.) ſo geführt werden, daß Aa der Kegelaxe $E\varepsilon$ parallel wird, weil nur in dieſem Falle der Schnitt durch den Nebenkegel, von welchem $CB\zeta$ ein Axentriangel iſt, einen Kreis geben kann.

§. 269.

Man lernt hieraus auch die Linie kennen, welche der Gleichung $ax + x^2 = y^2$ zugehört, die ſich nämlich von der Gleichung für den Kreis ($ax - x^2 = y^2$) nur durch das bejahte Zeichen im 2ten Gliede unterſcheidet. Setzt man nämlich $c = a$, ſo hat man $\sqrt{ap} = c = a$, alſo für die gleichſeitige Hyperbel

CCLIV. $p = a$

Dieſes in die allgemeine Gleichung (CCXXXVIII) geſetzt, giebt

CCLV.
$$\left\{\begin{array}{l} y^2 = ax + \frac{ax^2}{a} = ax + x^2 \\ \text{oder auch} \\ y^2 = px + x^2 \end{array}\right.$$

§. 270.

Die Hyperbel zwiſchen ihren Aſymptoten (z. B. $C\mu\alpha AC$ Fig. 28.) zu quadriren.

Aufl. Aus (§. 267.) ist $y = \frac{P^2}{x}$. Setzt man also die zu $C\mu = x$ und $\mu\alpha = y$ gehörige hyperbolische Fläche $C\mu\alpha AC = F$, so ist

$$dF = y \,.\, \text{Sin. } ADs \,.\, dx$$

$$= \frac{P^2 \,.\, \text{Sin. } ADs \,.\, dx}{x}$$

Demnach

$$F = P^2 \,.\, \text{Sin. } ADs \,.\, \text{logn. } x + \text{Const.}$$

Es ist aber P^2. Sin, $ADs = P.P.\text{Sin. } ADs = CD.AD.\text{Sin. } ADs = 2.\triangle CAD = \triangleleft CAn$, weil $Cn = 2.CD$ ist. Da nun $\triangleleft CAn = \frac{1}{2} CA.An = \frac{1}{2}.(\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}c) = \frac{1}{8}ac$ ist, so hat man P^2. Sin. $ADs = \frac{1}{8}ac$, also

$$F = \tfrac{1}{8}ac \,.\, \text{logn. } x + C$$

Für $x = CD = AD = P$ wird $F = \triangleleft CDA = \frac{1}{16}ac$, also

$$\tfrac{1}{16}ac = \tfrac{1}{8}ac \,.\, \text{logn. } P + C$$

und

$$C = \left(\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{8} \text{ logn. } P\right) . ac$$

Demnach

$$F = \tfrac{1}{8}ac \,.\, \text{logn. } x + \tfrac{1}{16}ac - \tfrac{1}{8}ac \,.\, \text{logn. } P$$

oder

$$\text{CCLVI.} \quad F = \tfrac{1}{16}ac + \tfrac{1}{8}ac \,.\, \text{logn.} \left(\tfrac{x}{P}\right)$$

Wird also die Fläche zwischen AD und $\alpha\mu$ unter F verstanden, so ist $A\alpha\mu D$ oder

CCLVII. $F = \frac{1}{8} ac. ln. \left(\frac{x}{P}\right) = P^2. Sin. ADs. ln. \left(\frac{x}{P}\right)$

Setzt man $AD = P = 1$, so wird in (CCLVII)

CCLVIII. $F = Sin. ADs . logn. x$

d. i. F, von AD nach $\alpha\mu$ genommen, ist der Logarithme von x in einem Systeme, dessen Model = Sin. ADs ist.

In diesem Falle ist $Cn = 2. AD = 2$, also für die gleichseitige Hyperbel $\triangleleft CAn = \frac{1}{2} AD . Cn = 1$, daher $\frac{1}{8} ac = 1$ und $P = 1$; demnach jetzt

$$F = logn. x$$

Sonst allgemein, wenn $AD = P$ die Einheit für x und das $\triangleleft CAn$ oder $P^2 . Sin. ADs = \frac{1}{8} ac$ die Einheit für die Fläche $A\alpha\mu D$ ist,

CCLIX. $F = logn. x$

Daher heißen die natürlichen Logarithmen auch Hyperbolische.

Fünftes Kapitel.

Einige andere krumme Linien.

I. Die Konchoide oder Muschellinie.

§. 271.

Die CA sey senkrecht durch die gerade HJ (Fig. 29.) gezogen; zieht man nun aus C gerade Linien, auf welchen man mF = nE = pB = qD = oA nimmt, so liegen F, E, A, B, D, in der Konchoide oder Muschellinie.

§. 272.

Eine Gleichung für die Konchoide zu finden.

Aufl. I. Wenn die Abscissen von o aus auf der CA genommen werden.

Es sey oA = a, Co = b, das Perpendikel Bv = ow = x, die Ordinate wB = ov = y, so ist pv = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, op = ov − pv = $y - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Es ist aber

$$Co : op = Cw : wB$$

oder

$$b : (y - \sqrt{(a^2 - x^2)}) = (b + x) : y$$

also

$$\text{CCLX.}\quad xy = (b + x) \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

und

$$\text{CCLXI.}\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{a^2 b^2}{x^2} + \dfrac{2a^2 b}{x} + a^2 - b^2 - 2bx - x^2 \\ \text{oder auch} \\ x^2 y^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + (a^2 - b^2)x^2 \\ \qquad - 2bx^3 - x^4 \end{cases}$$

II. Wenn die Abscissen auf der HJ von o aus genommen werden.

Jetzt wird z. B. $ov = x$ und $vB = y$; man darf also nur in vorstehender Gleichung x und y mit einander verwechslen. So wird jetzt

$$\text{CCLXII.}\quad xy = (b + y) \cdot \sqrt{(a^2 - y^2)}$$

wo sowohl zu jeder verneinten als zu jeder bejahten Abscisse, wie man sogleich aus CCLXI ersieht, zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten gehören. Daher findet die elbe krumme Linie zu beiden Seiten der geraden HJ statt. Sie ist vermöge der Gleichung eine krumme Linie der 4ten Ordnung. Auch fällt ins Auge, daß HJ eine Asymptote dieser Linie ist, weil die Perpendikel Bv, kq, D: etc. ohne Ende abnehmen.

§. 273.

Nimmt man z. B. $ov = og$, und denkt sich das Flächenstück ghEABv um die gv herumgedreht, so durchlauft solches einen körperlichen Raum, welcher ein konchoidisches Sphäroid ist. Der kubische Inhalt dieses Sphäroids sey K, und $ov = x$, $vB = y$ (nach §. 272. No. II.), so ist

$$K = \int \pi y^2 \, dx$$

Man erhält aber aus (CCLXII)

$$dx = -\frac{(a^2 b + y^3) \cdot dy}{y^2 \cdot \sqrt{(a^2 - y^2)}}$$

Daher

$$K = -\pi \cdot \int \left(a^2 b \cdot \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} + \frac{y^3 \cdot dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} \right)$$

Es sey $y = az$, so ist $\frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$

und

$$K = -\pi \cdot \left(\int a^2 b \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} + \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} \right)$$

Es ist aber

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} = -\text{Arc. Cos. } z.$$

Es sey ferner $a^2 - y^2 = v^2$, so wird

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = \int (a^2 - v^2) \cdot dv$$

$$= a^2 v - \tfrac{1}{3} v^3$$

$$= a^2 \sqrt{(a^2 - y^2)} - \tfrac{1}{3} (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

und

$$K = \pi \cdot \left(a^2 b \cdot \text{Arc. Cos. } \frac{y}{a} + a^2 \sqrt{(a^2 - y^2)} - \frac{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + C.$$

Da dieses Integral für $y = a$ verschwinden muß, so hat man $C = 0$, also

$$K = \pi a^2 b \cdot \text{Arc. Cos. } \frac{y}{a} + \tfrac{1}{3} \pi \cdot (2a^2 + y^2) \cdot \sqrt{(a^2 - y^2)}$$

Es ist aber $\sqrt{(a^2 - y^2)} = \frac{xy}{b + y}$, folglich

CCLXIII. $K = \pi . \left(a^2 b . \text{Arc. Cos.} \frac{y}{a} + \frac{(2a^2 + y^2) . xy}{3 . (b + y)} \right)$

Anm. Ich habe diese Kubatur hier beigebracht, weil sie bei Berechnung der Fässer angewendet werden kann.

II. Die Cissoide.

§. 274.

Am MB (Fig. 30.) sey ein Halbkreis; aus willkührlichen Punkten des Halbkreises m, M, seyen Sehnen mB, MB, und durch AB die mw, MW senkrecht gezogen; BP, Bp seyen auf BM, Bm, senkrecht, so heißt die krumme Linie Bq, in der die Durchschnittspunkte P, p liegen, die Cissoide.

§. 275.

Eine Gleichung für die Cissoide zu finden.

Aufl. Es ist (Fig. 30.) An : nm = Bn : np; also, wenn AB = a, Bn = x, np = y gesetzt wird,

$$(a - x) : \sqrt{(ax - x^2)} = x : y$$

und

$$y = \frac{x\sqrt{(ax - x^2)}}{a - x} = \frac{x . \sqrt{x} . (a - x)}{a - x}$$

oder

CCLXIV. $$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

Sie ist also eine Linie der 3ten Ordnung. Weitere Untersuchungen über diese krumme Linie waren ohne allen Nutzen.

III. Die Quadratrix des Dinostratus.

§. 276.

Der Quadrant CB (Fig. 31.), vom Halbmesser AC = AB beschrieben, sey z. B. in D, E, F in gleiche Theile

getheilt; Aq, qP, pl, lC seyen ebensoviele gleiche Theile des Halbmessers. Werden nun die aus den Theilungspunkten D, E, F gezogenen Halbmesser DA, EA, FA von geraden Linien, die aus l, p, q senkrecht auf AC gezogen werden, in m, n, o geschnitten, so liegen diese Punkte m, n, o in der Quadratrix des Dinostratus.

Der Umfang des Quadrants BFEDC sey = b, der Halbmesser AB = AC = r, BF = x, Aq = y, so ist Aq : AC = BF : BC, oder y : r = x : b, also

CCLXV. rx = by

Die Gleichung ist transscendentisch und bezeichnet keineswegs eine Linie der 1ten Ordnung, weil die Abscissen x Kreisbögen sind. Die Bemerkung am Ende des vorigen §. gilt auch hier.

IV. Die Cykloide oder Radlinie.

§. 277.

Der Halbkreis AMB (Fig. 32.), dessen Durchmesser AB auf der geraden DE senkrecht steht, wälze sich über die DE so weg, daß die höchste Stelle B endlich in die gerade ED herabfällt, wie hier bei H, so ist die durchlaufene Linie BFGH eine halbe Cykloide (Kykloide) oder Radlinie; durch die Bewegung nach E hin ergiebt sich die andere Hälfte BKLJ.

§. 278.

Der Mittelpunkt des Kreises rücke bis in ε fort, so daß jetzt βα der lothrechte Durchmesser und G ein Punkt in der Cykloide sey; auch sey Gn der DE gleichlaufend, so ist vG = no, daher Go = vn = Aα. Aber Aα = HA — Hα = Bog. AoB — Bog. αG = Bog. AoB — Bog. Ao = Bog. Bo. Demnach Go = Bog. Bo.

Bezeichnet also u irgend ein auf dem Halbkreise BMA genommenes Bogenstück (wie Bo) als Abscisse, und z die zu dieser Abscisse gleichlaufend mit AH genommene Ordinate (wie oG), so hat man

$$z = u$$

also eine zwar sehr einfache aber dennoch transscendentische Gleichung, weil u ein Bogenstück ist.

Nimmt man aber auf dem Durchmesser BA = a die Abscissen (wie Bn) = x, und Gn = y, so hat man

$$nG = no + oG$$
$$= \sqrt{(ax - x^2)} + \text{Bog. Bo, oder}$$
$$= \sqrt{(ax - x^2)} + \text{Bog. Sin.} \sqrt{(ax - x^2)}$$

§. 279.

Die Cykloide zu quadriren.

Aufl. Es sey BP der AH gleichlaufend, und Bβ eine willkührliche Abscisse = ↓, βγ die zugehörige Ordinate = w, so ist ↓ = δγ = y; w = Bδ = x, wenn x und y aus dem vorigen §. genommen werden. Setzt man nun das Flächenstück Bγβ = F, so ist $dF = w \cdot d\downarrow = x \cdot dy$, oder, 2r statt a gesetzt,

$$dF = x \cdot d\left(\sqrt{(2rx - x^2)} + \text{Bog. B}_n\right)$$

Bezeichnet man die zu x gehörige Ordinate im Kreise, mit v, so ist $(d \text{ Bog. B}_n)^2 =$

$$(dx)^2 + (dv)^2 = (dx)^2 + \left(d\,(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$= \frac{r^2\,(dx)^2}{2rx - x^2}$$

und

$$d \text{ Bog B}_n = \frac{r \cdot dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

Hieraus giebt sich

$$= \quad dF = x \cdot \frac{2r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} \cdot dx$$

und

$$F = \int (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \int v \cdot dx$$

oder

CCLXVI. Fläche $B\gamma\beta$ = Fläche $B\alpha\delta$

Daher die ganze Fläche $BGHp$ = dem Halbkreis $BoAB$ $= \frac{1}{2}\pi r^2$. Es ist aber $Bp = BoA = \pi r$, und $AB = Hp = 2r$, also

Rektangel $ABpH = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$

und

Halbe Cykloidenfläche $BGHAB = 2\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 1{,}5 \cdot \pi r^2$

Demnach

CCLXVII. Ganze Cykloidenfläche $= 3 \cdot \pi r^2$ dreimal so groß als die zum Durchmesser AB gehörige Kreisfläche.

§. 280.

Die Cykloide zu rektificiren.

Aufl. Man hat hier $dy^2 = \frac{2r - x}{x} \cdot (dx)^2$; daher, wenn der zu y gehörige Bogen mit s bezeichnet wird,

$$ds = \sqrt{\left((dx)^2 + \frac{2r - x}{x} \cdot (dx)^2\right)}$$

$$= (\sqrt{2r}) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$$

Demnach

CCLXVIII. $s = (\sqrt{2r}) \cdot \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{2rx}$

Wenn nun v die zu x gehörige Ordinate des Kreises ist, so ist $2rx - x^2 = v^2$, also $2rx = x^2 + v^2$, oder = dem Quadrat der zu x und v gehörigen Sehne des Kreises. Heißt daher die Sehne z, so hat man

CCLXIX. $s = 2\sqrt{z^2} = 2z$

Es ist also jedes cykloidische Bogenstück wie $B\gamma$ doppelt so groß als die Sehne $B\nu$, daher der cykloidische Bogen BH = dem doppelten Durchmesser BA, und

CCLXX. Der ganze cykloidische Bogen HBJ = dem vierfachen Durchmesser BA

§. 281.

Für eine gegebene Stelle der Cykloide den Krümmungshalbmesser zu bestimmen.

Aufl. Er ist allgemein

$$= -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(d\frac{dy}{dx}\right).(dx)^2}$$

also (vorigen §.)

$$= -\frac{\left((dx)^2 + \frac{2r-x}{x}.(dx)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{d\frac{2r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}.(dx)^2}$$

und nach gehöriger Berechnung

$$= 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)}$$

oder auch

$$= 2\sqrt{((2r)^2 - (x^2 + v^2))}$$

Wenn also $B\delta$ irgend eine unbestimmte Abscisse ist, und R den zur Stelle γ gehörigen Krümmungshalbmesser bezeichnet, so hat man $R = 2.\sqrt{(AB^2 - (B\delta^2 + \delta\nu^2))}$ $= 2\sqrt{(AB^2 - B\nu^2)}$, oder

CCLXXI. R = der doppelter Sehne A „
So wäre also für die Stelle B der Krümmungshalbmesser = 2 . AB.

§. 282.

Weil jeder cykloidische Bogen, wie BG = 2. Sehne Bo ist, und der cykloidische Bogen BH = 2 AB, so hat man auch CCLXXXII. Cykloidische Bogen GH = 2. (AB — Bo).

§. 283.

Wenn die Abscissen auf der Kreislinie BPA (Fig. 33.) genommen werden, die zur Abscisse BP = u und Ordinate PM = z gehörige Subtangente P τ zu bestimmen.

Aufl. M τ, P τ, seyen Berührungslinien an M und P, und Pp also auch das Cykloidenstückchen Mm sehr klein, und Mn der P τ gleichlaufend, so ist

beinahe $mn : nM = MP : P\tau$

und in aller Schärfe

$$dz : du = z : \text{Subt.}$$

also

$$\text{Subt.} = \frac{du}{dz} \cdot z$$

Es ist aber $z = u$ (§. 278.), also $\frac{du}{dz} = 1$, und

CCLXXXIII. Subt. = z
also P τ = PM = Bog. BP

§. 284.

Weil P wo man will in der Kreislinie liegen darf, so daß allemal P τ = Bog. BP bleibt, so kann man τP als eine vom Bogen BP abgewickelte Linie betrachten, deren

Anfangspunkt r anfänglich in B lag; allemal ist aber r zugleich der Endpunkt der Berührungslinie M r oder der Subtangente r P. Der geometrische Ort für die Endpunkte aller solcher Tangenten oder Subtangenten ist also die durch Abwicklung des Kreises erzeugte B r.

§. 285.

Man denke sich eine an dem cykloidischen Bogen HMB in allen Punkten anliegende Linie, die von B aus wie ein Faden unter beständiger Anspannung abgewickelt werde, so daß der Endpunkt B die krumme B v b E durchlaufe, so ist diese durch solche Abwicklung erzeugte Linie B b E bis an die senkrecht auf A H stehende H E eine Cykloide, die der HMB kongruent ist.

Ist nämlich a e eine Berührungslinie in a, und nimmt man a b = a M B, so ist b ein Punkt in der Evolutionslinie B E, und es ist a b = a M B = 2 × Sehne B d (CCLXIX). Zugleich ist aber vermöge der Beschreibung der Linie B b E jede so bestimmte a b der Krümmungshalbmesser für die Stelle b; also sind die zu den von E bis B herab liegenden Punkten der Linie E b B gehörigen Halbmesser der Krümmung die doppelten Längen der Sehnen, welche im Kreise B P A von B aus nach allen Punkten des Halbkreises (der halben Kreislinie) gezogen werden können.

Da nun die zu den von B bis H in der Cykloide B M H liegenden Punkten gehörigen Krümmungshalbmesser die doppelten Längen der Sehnen sind, welche von A aus im Halbkreise B P A nach allen Punkten der Kreislinie gezogen werden können, und diese Sehnen in eben der Ordnung und Größe auf einander folgen, wie jene, so ist die Evolutionslinie E b B mit ihrer Evolute der Cykloide B M H, von der sie abgewickelt worden, nothwendig kongruent.

§. 286.

Denkt man sich statt der geraden DJ. (Fig. 32.) eine Kreislinie, durch deren Mitrelpunkt die abwärts verlängerte BA durchgeht, und wird nun der Halbkreis BMA über die Kreislinie herabgewälzt, so fällt jetzt der Punkt B schneller abwärts als vorhin. Die krumme Linie, welche er durchlauft, heißt eine Epicykloide.

Schlußanmerkung.

§. 287.

Unter allen krummen Linien ist die Kreislinie die wichtigste, sowohl in Bezug auf ihr unmittelbares Vorkommen, als in Bezug auf die mannichfaltigen Funktionen, die mit dem Kreise zusammenhängen. Beispiele liefern uns die Trigonometrie und eine große Anzahl wichtiger Integrationen. Die Ellipse im Allgemeinen kommt gleichfalls häufig vor z. B. bei den Bahnen der Weltkörper, bei elliptischen Bögen, elliptisch-sphäroidischen Gewölben und Brennspiegeln, bei Projektionszeichnungen u. d. gl. Die Parabel hat bei parabolischen Spiegeln ihren Gebrauch, und so auch bei großen elliptischen Bahnen, insofern nur kleine Stücke vom Scheitel aus gerechnet betrachtet werden, wie bei Körpern, die nach Richtungen abgeworfen werden, die nicht lothrecht sind, indem solche in aller Strenge zwar eine elliptische Bahn durchlaufen, die aber ohne merklichen Fehler als parabolisch angesehen werden kann. Die Hyperbel ist durch ihre Form und durch die ihr vermöge derselben zukommenden mannichfaltigen Eigenschaften merkwürdig. Die Konchoide hat außerdem, daß sie bei Berechnung der Fässer anwendbar ist, auch noch eine Form, die sie zu Brücken- und andern Gewölben brauchbar macht, wenn man sie nur nicht bis zu ihren Wendungspunkten nimmt,

Doch wird sie zu diesem Gebrauche wohl keine der sonst schon gewöhnlichen Linien verdrängen. Auch zu Wehren, Damm- und Uferbefestigungen hat sie eine sehr schickliche Form. Die Cissoide und Quadratrix sind nur Gegenstände leerer Spekulation. Die Cykloide ist für die Mechanik höchstmerkwürdig; sie ist sowohl tautochronisch als brachystochronisch (s. m Handb. d. gem. u. höheren Mech. S. 350 u. f.). Auch ist die Cykloide die beßte Abrundung für die Kämme der Kammräder und für die Hebeköpfe in den Daumenwellen bei Aufwerfhämmern, so wie die Epicykloide bei Stirnrädern und den Köpfen der Daumenwellen bei Schwanzhämmern. Die Evolutionslinien machen eine eigene Klasse krummer Linien aus. Die Evolutionslinie des Kreises (deren Evolute der Kreis ist) giebt uns die beßte Abrundung der Hebeköpfe an den Daumenwellen der Stampfmühlen zur Erhebung der Stampfer. Die Kettenlinie lernt man in der höheren Mechanik kennen (s. m. angef. Handbuch S. 264. u. f.). Eine andere Linie (die Herzlinie) habe ich in meinem im vorigen Jahre erschienenen Werke: Neuere Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften betrachtet. Mehrere neuere krumme Linien von Uhlhorn angegeben und mit vielem Scharfsinne untersucht findet man in dessen Entdeckungen der höheren Geometrie (Oldenburg 1809), wo auch Werkzeuge zu ihrer Verzeichnung angegeben werden.

Verzeichniß der Schriften des Herrn Verfassers, welche bei den Verlegern dieses Werks erschienen, und in allen Buchhandlungen Deutschlands zu haben sind.

Erläuterung über Kästners Analysis endlicher Größen, 2 Theile, 8. 1777. 1778. 2 fl. 6 kr. — 1 Rthlr. 8 gr.

Arithmetische Abhandlungen über juristische, staats- und forstwirthschaftliche Fragen, Mortalität, Bevölkerung und chronologische Bestimmungen, gr. 8. 1810. 1 fl. 30 kr. — 1 Rthlr.

Einleitung in das Studium der Elementar-Geometrie, Algebra, Trigonometrie, Differenzial- und Integral-Rechnung, der höhern Geometrie und der Dynamik, mit vorzüglicher Rücksicht auf Maschinenlehre. Mit 7 Tafeln auf Stein, gr. 8. 1814. 2 fl. 30 kr. — 1 Rthlr. 12 gr.

Neuere Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften, besonders zur Vervollkommnung der Maschinenlehre, mit Anwendungen auf Getreidemühlen, Sägemühlen, Stampfmühlen, Hammerwerke, Röhrenleitungen, Kanäle ꝛc., mit 1 Kupfer, gr. 8. 1816. 3 fl. — 2 Rthlr.

Leichtfaßliche Anleitung zur Analysis endlicher Größen und des Unendlichen, so wie zur höhern Geometrie, mit 3 Kupfertafeln, gr. 8. 1817. 4 fl. 30 kr. — 3 Rthlr.

Gemeinfaßliche durchaus auf Erfahrung gegründete Anleitung zum Straßen- und Brückenbau, nebst einem Anhange über die Gautheysche Brückenbaukunde, gr. 8. mit 22 Kupfertafeln in quer Folio. 1817.

Auf Schreibpapier Ladenpreis 22 fl. — 12 Rthlr.
Pränumerationspreis gegen baare Zahlung 18 fl. — 10 Rthlr.

Auf Druckpapier Ladenpreis 18 fl. — 10 Rthlr.
Pränumerationspreis gegen baare Zahlung 15 fl. — 8 Rthlr.

Die übrigen Werke des Herrn Verfassers, welche bei andern Verlegern erschienen sind, so wie dessen Uebersetzungen der mechanisch-hydraulischen Werke von Prony, Bossut und Bernard, mit vielen Anmerkungen des Herrn Uebersetzers, sind auch bei uns, so wie in allen Buchhandlungen zu haben.

Tab. I.

Fig. 1.

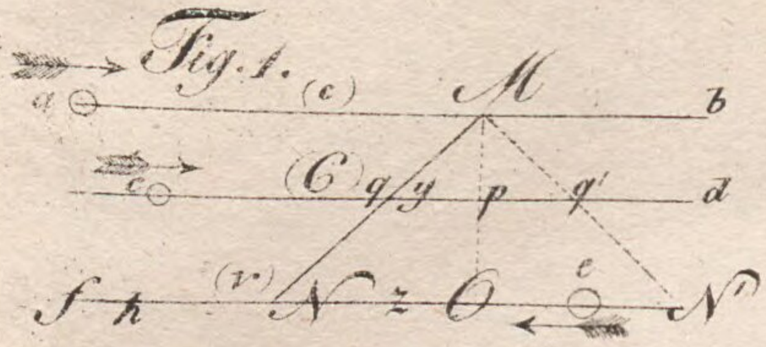
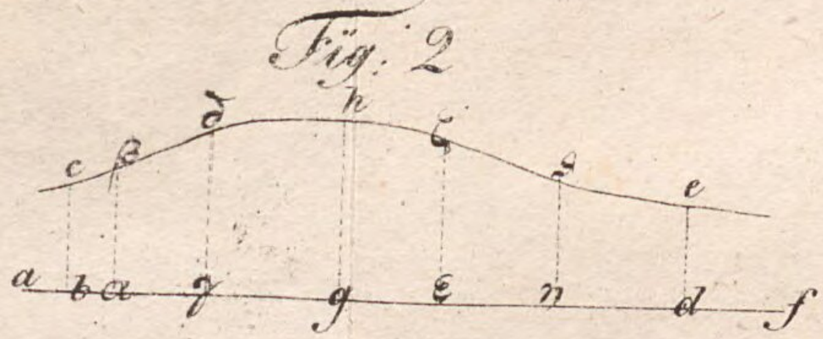


Fig. 2



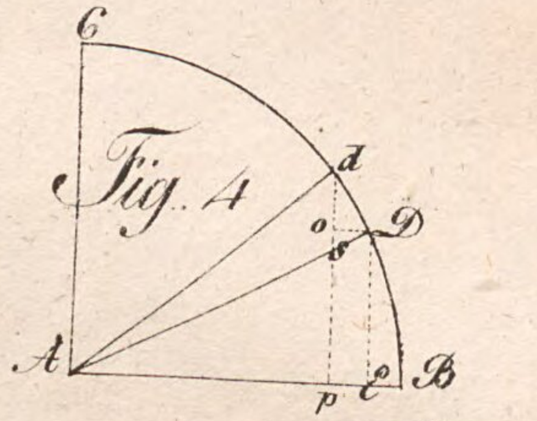
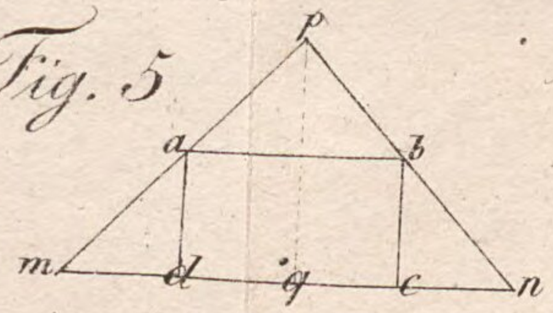


Fig. 3

Fig. 5



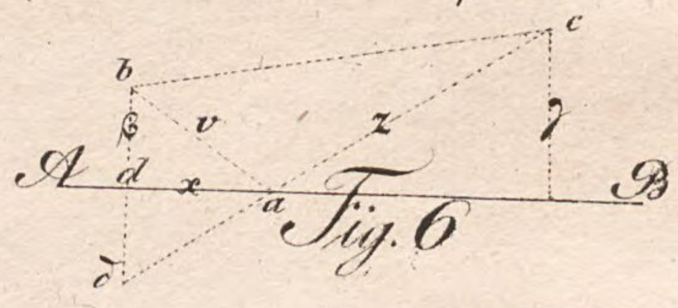
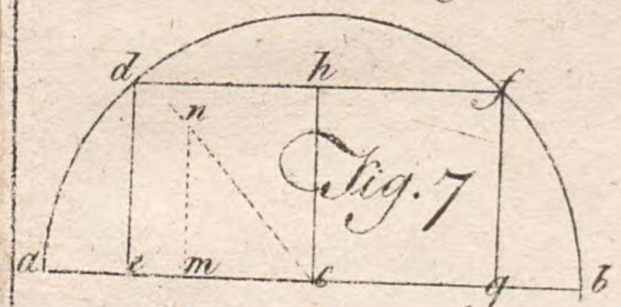


Fig. 6



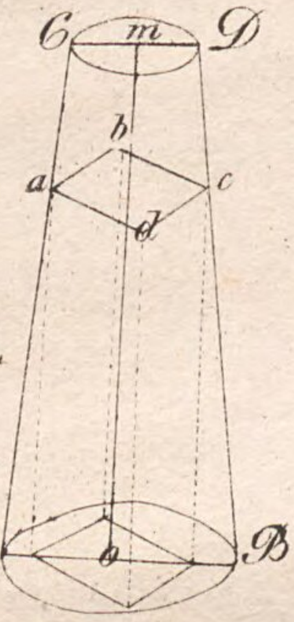


Fig. 9.

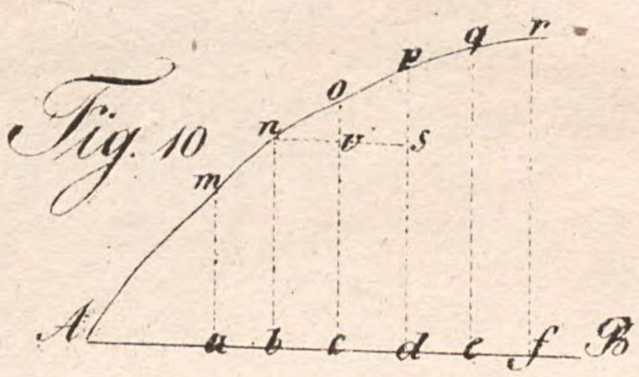


Fig. 10

Fig 11

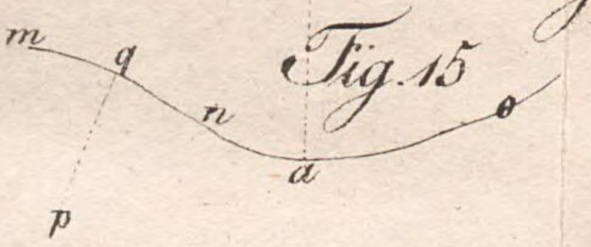


Fig. 15

Fig. 12

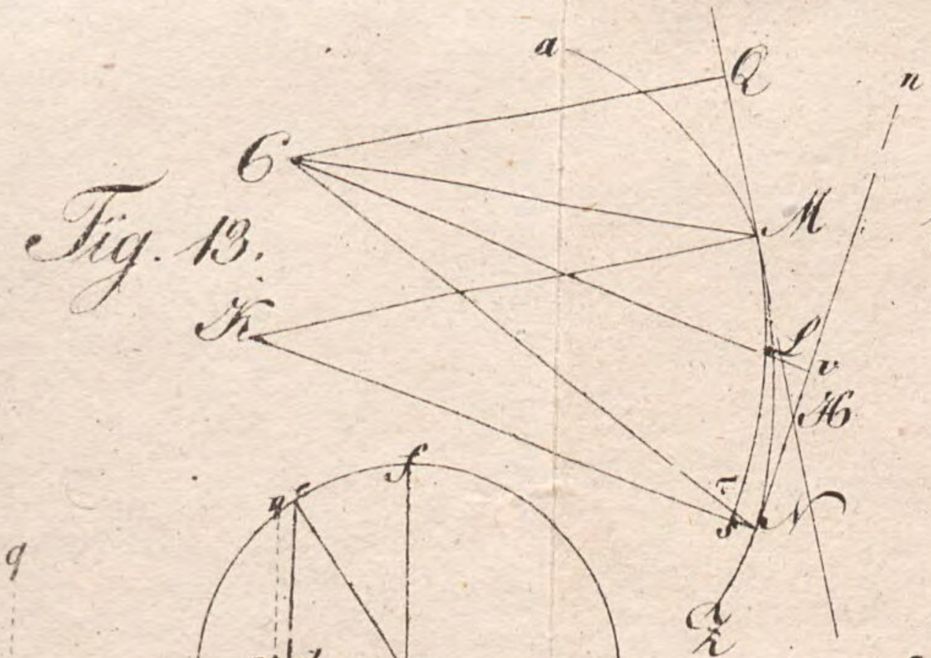


Fig. 13.

Fig. 18

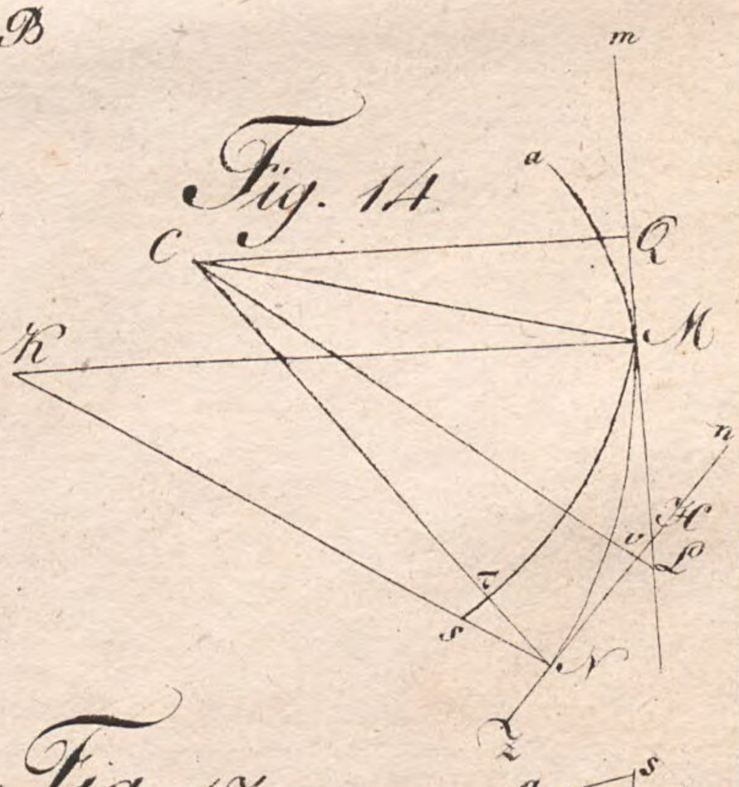


Fig. 14

Fig. 17

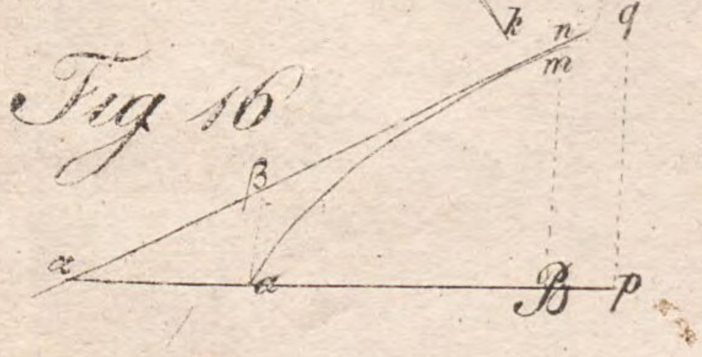


Fig 16

Fig 25

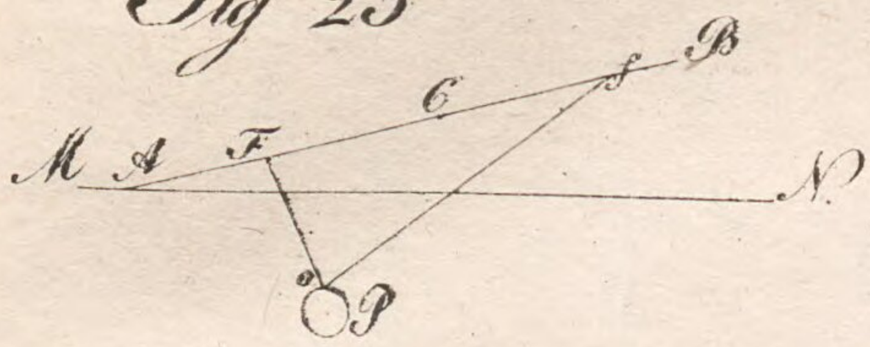
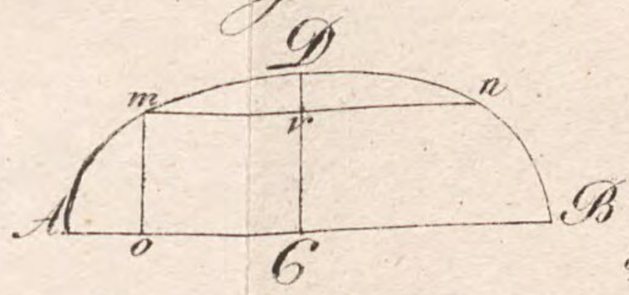


Fig. 23



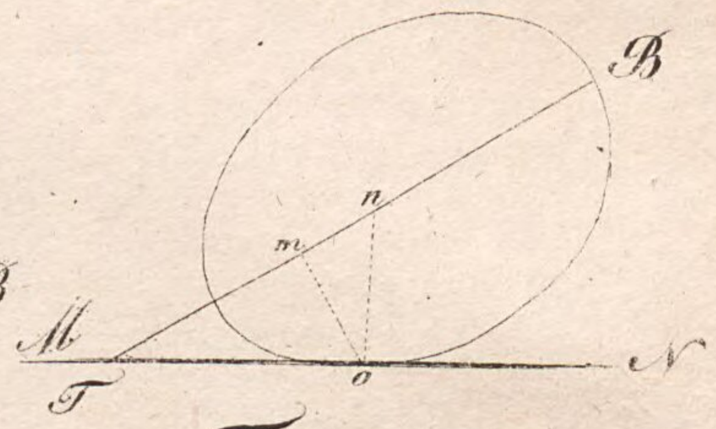
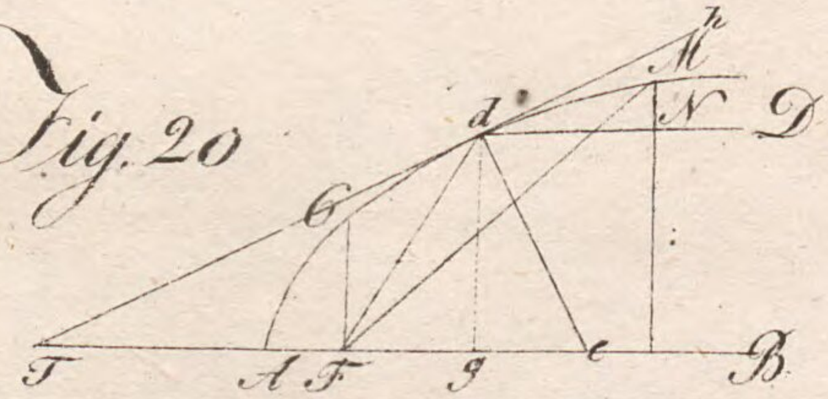


Fig. 24.

Fig. 20



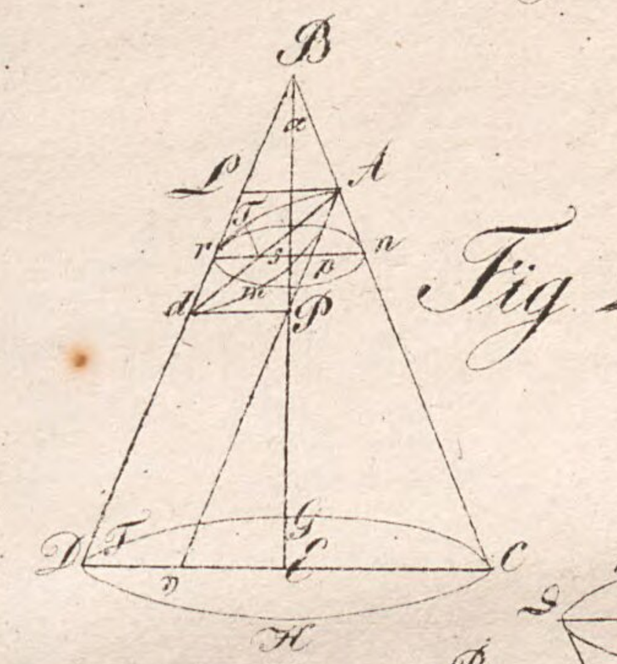


Fig. 21.

Fig. 22

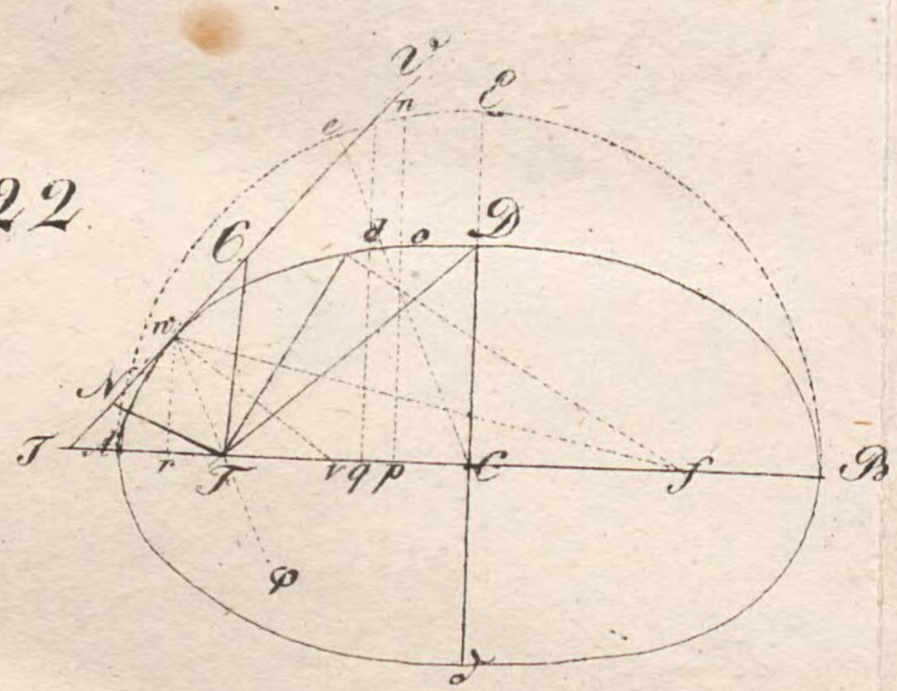
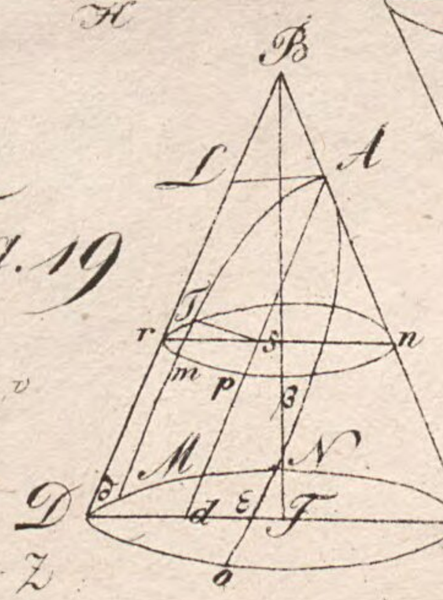


Fig. 19



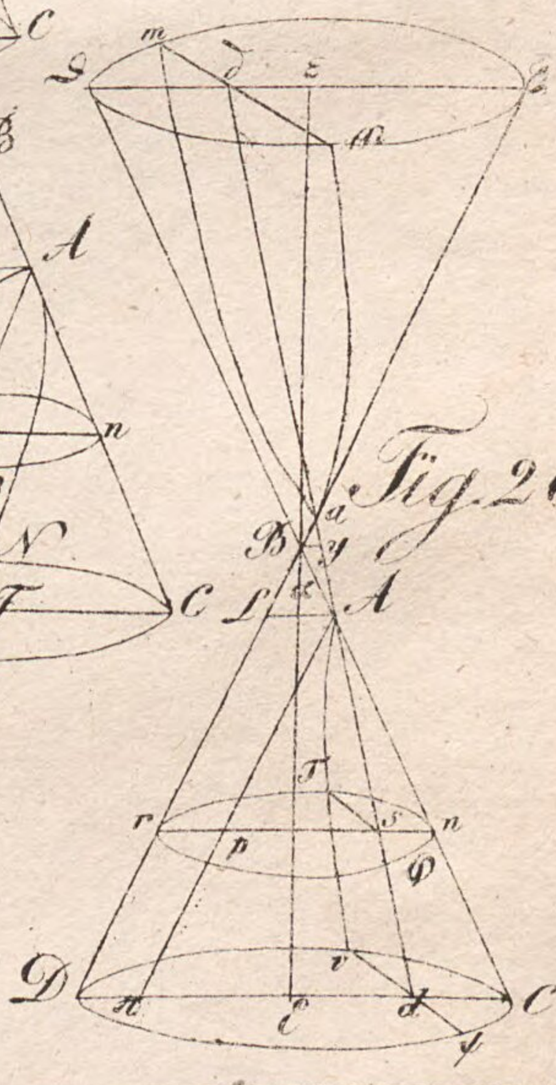


Fig. 26.

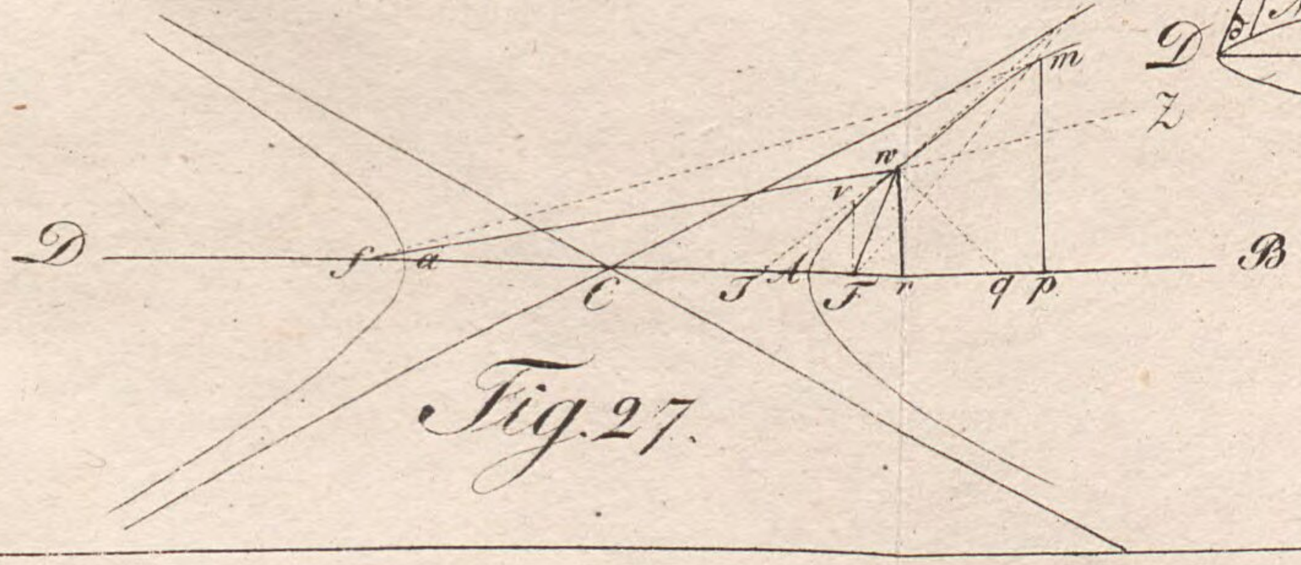


Fig. 27.

Tab. III

Fig. 32

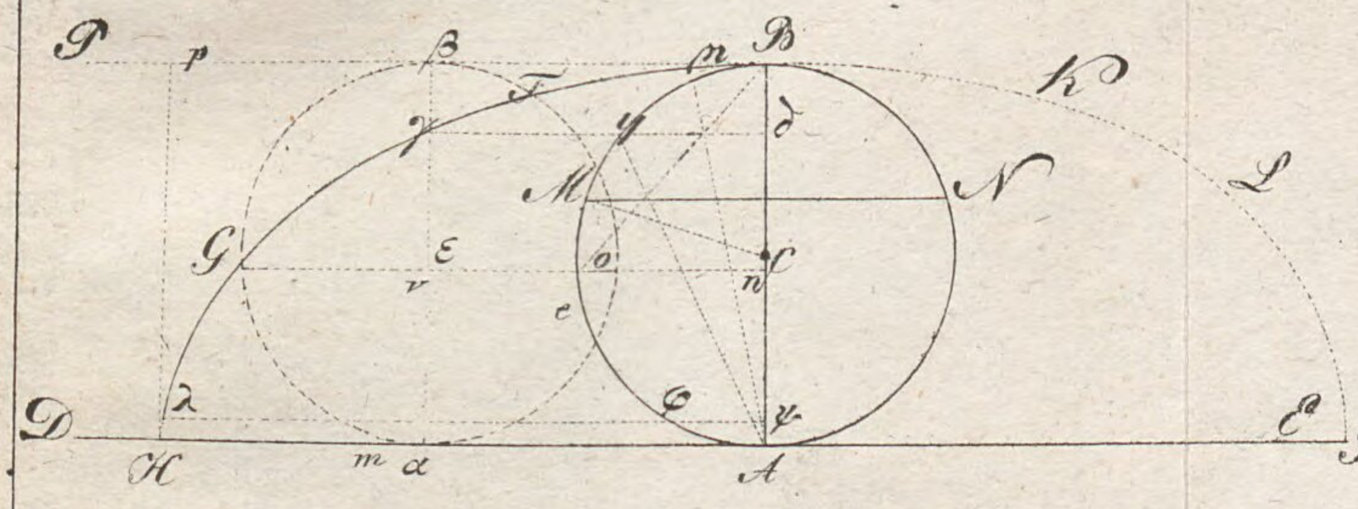


Fig. 28.

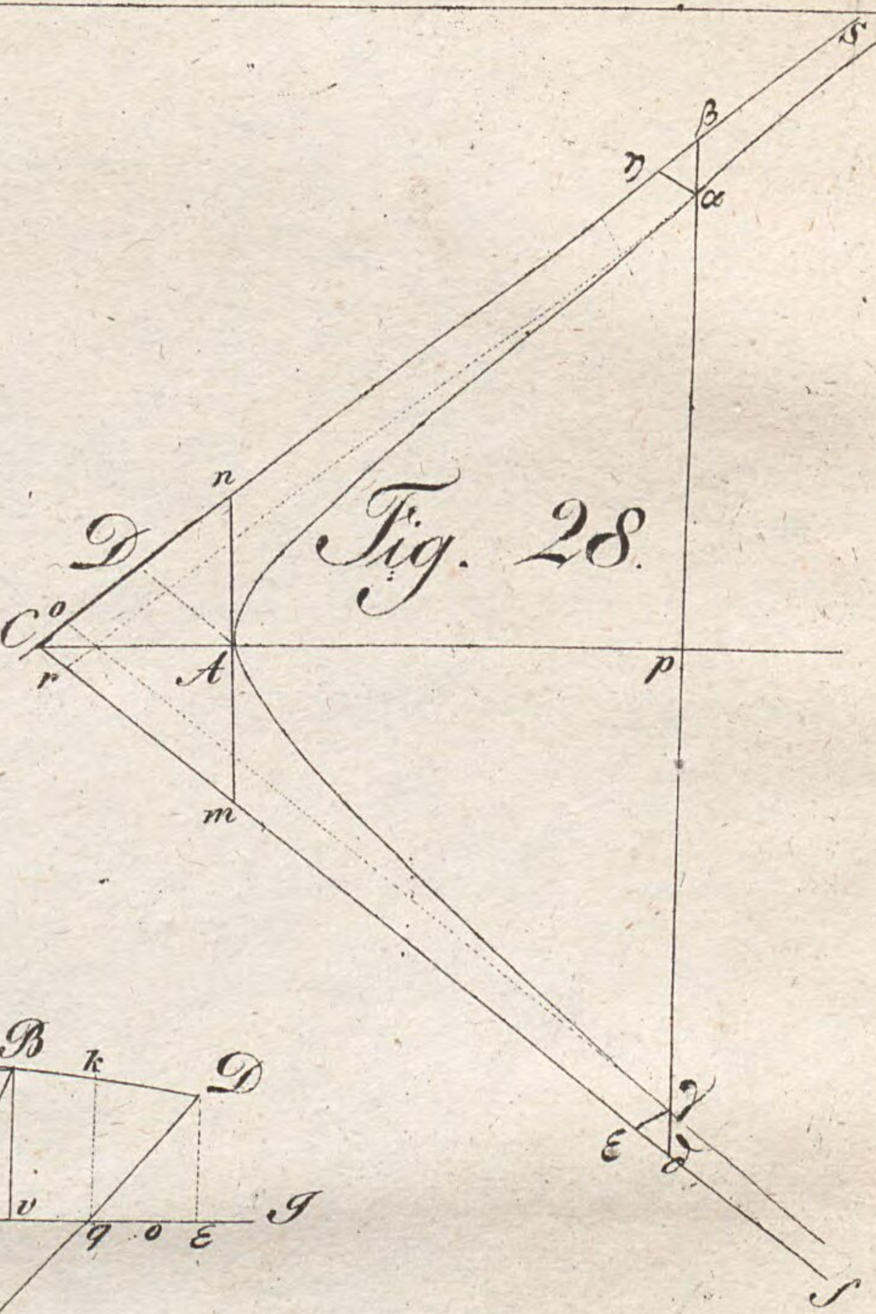


Fig. 29

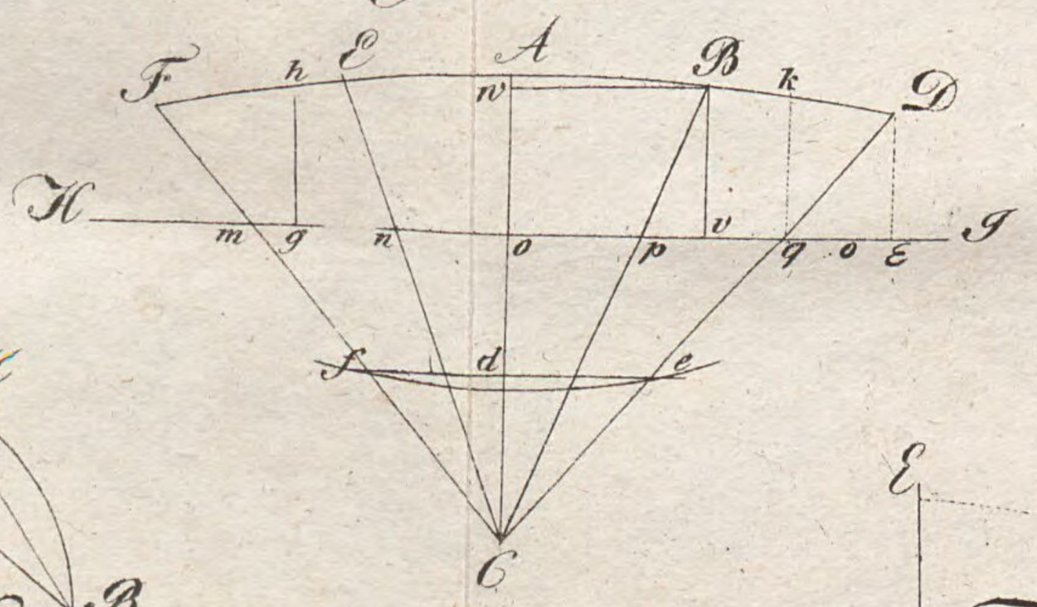
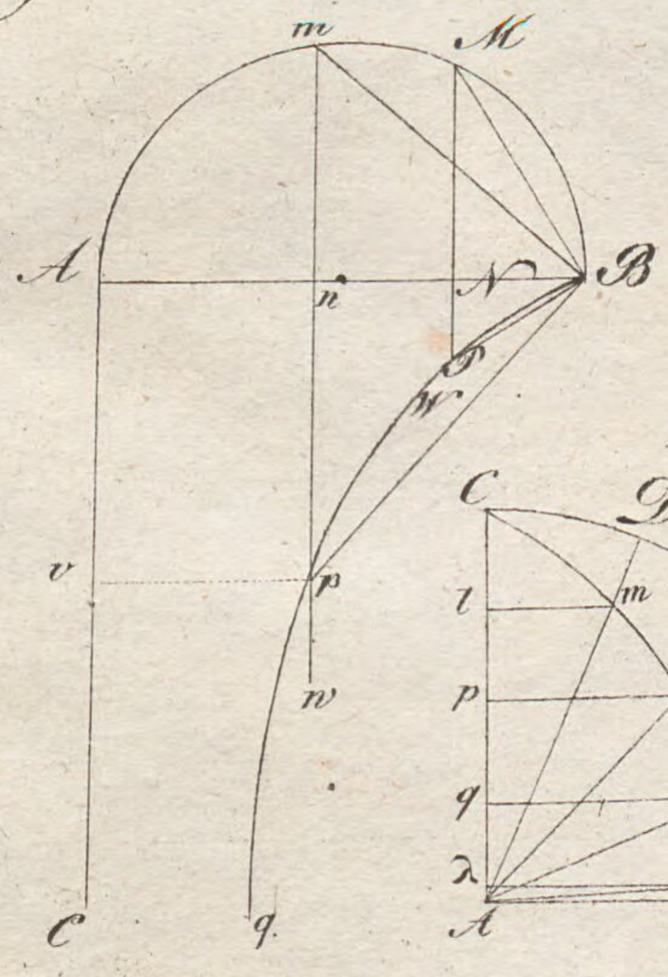


Fig. 30.



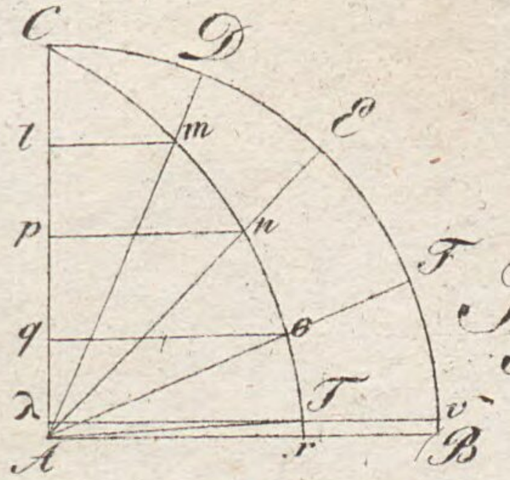


Fig. 31

Fig. 33

36

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Leichtfaßliche Anleitung zur Analysis endlicher Größen und des Unendlichen
...

Mannheim 1817
Math.p. 279 u
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082243-6